

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2017

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Έστω τα ενδεχόμενα :

X: ο πολίτης να είναι χορτοφάγος.

A : ο πολίτης είναι κάτοικος της πόλης A.

B: ο πολίτης είναι κάτοικος της πόλης B.

Γ: ο πολίτης είναι κάτοικος της πόλης Γ.

Από την εκφώνηση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: $P(A)=0.2$, $P(\Gamma)=0.5$, $P(B)=1-P(A)-P(\Gamma)=0.3$ και $P(X|A)=0.4$, $P(X|B)=0.2$, $P(X|\Gamma)=0.3$

(α) Από ΘΟΠ έχουμε ότι:

$$P(X) = P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) + P(X|\Gamma)P(\Gamma) = 0.29$$

(β) Από την χρήση του ορισμού δεσμευμένης πιθανότητας προκύπτει ότι:

$$P(A|X) = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X)} = \frac{0.4 \times 0.2}{0.29} = \frac{8}{29}$$

Άσκηση 2.

(α) Έστω A_i το γεγονός ότι εστάλη i και B_i το γεγονός ότι ελήφθη i . Χρησιμοποιώντας τον νόμο της ολικής πιθανότητας και της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(B_0|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_2)P(A_2) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \epsilon) + \frac{1}{4}\epsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\epsilon \end{aligned}$$

$$P(B_1) = \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{4}(1 - \epsilon) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon$$

$$P(B_2) = \frac{1}{4}\epsilon + \frac{1}{4}(1 - \epsilon) = \frac{1}{4}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο το άθροισμα των πιθανοτήτων των γεγονότων B_i είναι 1.

(β)

$$\begin{aligned}
 P(A_0|B_1) &= \frac{P(A_0|B_1)}{P(B_1)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\epsilon}{\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{4}(1-\epsilon)} \\
 &= \frac{2\epsilon}{1+\epsilon}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(A_1|B_1) &= \frac{\frac{1}{4}(1-\epsilon)}{\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{4}(1-\epsilon)} \\
 &= \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}
 \end{aligned}$$

$$P(A_2|B_1) = 0$$

Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι το άθροισμα των δεσμευμένων πιθανοτήτων είναι 1.

Άσκηση 3.

Από την εκφώνηση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: $A=\{1,2,3\}$, $A^c=\{0\}$, $B=\{0,1\}$, $B^c=\{2,3\}$, $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \{1\}$

(α) Αφού τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα έχουμε:

$$P(A)=P(\{1,2,3\})=3/4, \quad P(B)=P(\{0,1\})=1/2, \quad P(A \cup B)=P(\Omega)=1$$

(β) Έχουμε ότι:

$$P(A \cap B)=P(\{1\})=1/4 \neq P(A)P(B)=3/8, \quad \text{άρα δεν είναι ανεξάρτητα.}$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$P(A \cap A^c)=P(\{\emptyset\})=0 \neq P(A)P(A^c)=3/16, \quad \text{άρα δεν είναι ανεξάρτητα.}$$

(δ) Έχουμε ότι:

$$P(B \cap B^c)=P(\{\emptyset\})=0 \neq P(B)P(B^c)=4/16, \quad \text{άρα δεν είναι ανεξάρτητα.}$$

(ε) Αφού ισχύει ότι $A \cup B = \Omega$ τότε:

$$P(A \cap \Omega)=P(A)=3/4=P(A)P(\Omega), \quad \text{άρα είναι ανεξάρτητα.}$$

(στ) Έχουμε ότι:

$$P(A \cap (A \cap B))=P(A \cap B)=1/4 \neq P(A)P(A \cap B)=3/16, \quad \text{άρα δεν είναι ανεξάρτητα.}$$

Άσκηση 4.

(α) Ορίζουμε το γεγονός $A = \{\text{το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής } 1/3 \text{ ρίχνεται πρώτο}\}$. Προφανώς, $A^c = \{\text{το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής } 2/3 \text{ ρίχνεται πρώτο}\}$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαμέριση του δειγματοχώρου, εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(H_1) = P(A)P(H_1|A) + P(A^c)P(H_1|A^c) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Ομοίως:

$$P(H_2) = P(A)P(H_2|A) + P(A^c)P(H_2|A^c) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

(β) Ομοίως, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(H_1 \cap H_2) &= P(A)P(H_1 \cap H_2|A) + P(A^c)P(H_1 \cap H_2|A^c) \\ &= P(A)P(H_1|A)P(H_2|A) + P(A^c)P(H_1|A^c)P(H_2|A^c) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{3} = \frac{2}{9}. \end{aligned} \quad (1)$$

(γ) Από τα (α) και (β) έχουμε ότι $P(H_1 \cap H_2) = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{2} \frac{1}{2} = P(H_1)P(H_2)$. Συνεπώς, τα γεγονότα H_1 και H_2 δεν είναι ανεξάρτητα, αν και είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του A .

Άσκηση 5.

Έστω τα γεγονότα $A = \{\text{Ο Κώστας λέει ότι είδε 6}\}$, $B = \{\text{Το ζάρι έφερε 6}\}$ και B^c το συμπληρωματικό του B . Ισχύει ότι: $P(B) = 1/6$ και $P(B^c) = 5/6$.

Ακόμα, από την εκφώνηση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η πιθανότητα ο Κώστας να είπτε ότι έφερε 6 και να ήρθε όντως 6 είναι $P(A|B) = 2/3$, ενώ η πιθανότητα ο Κώστας να είπτε ότι έφερε 6 αλλά να μην να ήρθε 6 είναι $P(A|B^c) = 1/3$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τον κανόνα του *Bayes*, η πιθανότητα το ζάρι να έφερε όντως 6 είναι:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B)P(A|B)}{P(B^c)P(A|B^c) + P(B)P(A|B)} \\ P(B|A) &= \frac{1/6 \times 2/3}{5/6 \times 1/3 + 1/6 \times 2/3} \\ P(B|A) &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

(α) Εφόσον τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\
 &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\
 &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\
 &= P(A^c) - P(B) + P(A)P(B) \\
 &= P(A^c) - P(B)(1 - P(A)) \\
 &= P(A^c)(1 - P(B)) \\
 &= P(A^c)P(B^c)
 \end{aligned}$$

Επομένως και τα συμπληρωματικά τους ενδεχόμενα, A^c και B^c είναι ανεξάρτητα.

(β)

(ι) Τα ενδεχόμενα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα, οπότε ισχύει:

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$$

Για να είναι ανεξάρτητα τα γεγονότα $A \cup B, \Gamma$ θα πρέπει:

$$P((A \cup B) \cap \Gamma) = P(\Gamma)P(A \cup B)$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P((A \cup B) \cap \Gamma) &= P((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) = P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma) \\
 &= P(A \cap \Gamma) + P(B \cap \Gamma) - P(A)P(B)P(\Gamma) \\
 &= P(A)P(\Gamma) + P(B)P(\Gamma) - P(A)P(B)P(\Gamma) \\
 &= P(\Gamma) [P(A) + P(B) - P(A)P(B)] \\
 &= P(\Gamma)P(A \cup B)
 \end{aligned}$$

οπότε τα ενδεχόμενα $A \cup B, \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

(ιι) Για να είναι τα γεγονότα A, $B \cap \Gamma$ ανεξάρτητα θα πρέπει να ισχύει:

$$P(A \cap (B \cap \Gamma)) = P(A)P(B \cap \Gamma)$$

Έχουμε ότι: $P(A \cap (B \cap \Gamma)) = P(A)P(B)P(\Gamma) = P(A)P(B \cap \Gamma)$

οπότε τα ενδεχόμενα A, $B \cap \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 7.

Έστω M , E και Γ τα ενδεχόμενα ο Αλέξανδρος να επέλεξε αντίστοιχα την Μαρία, την Ελένη και την Γεωργία. Έστω ακόμα το ενδεχόμενο X ο Αλέξανδρος να απορριφθεί.

Εφόσον ο Αλέξανδρος διαλέγει μια από τις κοπέλες στην τύχη εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $P(M)=P(E)=P(\Gamma)=1/3$

Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ακόμα ότι: $P(X|M)=0.1$, $P(X|\Gamma)=0.5$, $P(X|E)=0.95$.

Επομένως, παρατηρώντας ότι τα M, E και Γ αποτελούν διαμέριση και χρησιμοποιώντας το κανόνα του *Bayes* έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(M|X) &= \frac{P(M)P(X|M)}{P(M)P(X|M) + P(\Gamma)P(X|\Gamma) + P(E)P(X|E)} \\ &= \frac{0.1 \times 1/3}{0.1 \times 1/3 + 0.5 \times 1/3 + 0.95 \times 1/3} \\ &= 0.0645 \end{aligned}$$

Άσκηση 8.

Ορίζουμε τα γεγονότα:

$B = \{\text{Η Σοφία τρώει τη σοκολάτα}\}$

$A = \{\text{Η σοκολάτα είναι ION γάλακτος}\}$

$A^c = \{\text{Η σοκολάτα είναι ION αμυγδάλου}\}$

Από την εκφώνηση έχουμε ότι $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(A^c) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{5}$, $P(B|A^c) = \frac{2}{5}$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4} = 0.25$$