ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2017-2018
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 8

Άσκηση 1
Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X και Y με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(2x+y), & 2 < x < 6,\ 0 < y < 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

β) Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y.

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(3 < X < 4, Y > 2)$

δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 3)$

ε) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X + Y > 4)$

στ) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές;

Λύση
α) Έχουμε ότι:

$$\int_2^6 \int_0^5 c(2x+y)\,dy\,dx = 1$$

$$\int_2^6 c\left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^5 dx = \int_2^6 c(10x + \frac{25}{2})\,dx = 210c = 1$$

$$c = \frac{1}{210}$$

β) Οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y γίνονται:

$$f_X(x) = \int_0^5 f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^5 \frac{2x+y}{210}\,dy = \frac{1}{210}\left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^5 = \frac{1}{210}(10x + \frac{25}{2})$$

και

$$f_Y(y) = \int_2^6 f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_2^6 \frac{2x+y}{210}\,dx = \frac{1}{210}\left[2\frac{x^2}{2} + yx\right]_2^6 = \frac{1}{210}(32 + 4y)$$

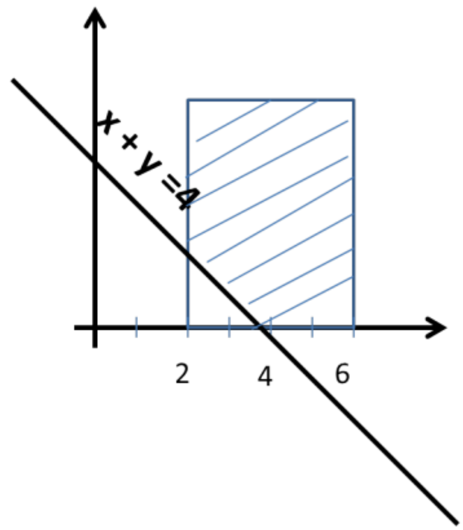
γ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(3 < X < 4, Y > 2) = \frac{1}{210}\int_3^4 \int_2^5 (2x+y)\,dy\,dx = \frac{3}{20}$$

δ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(X > 3) = \frac{1}{210}\int_3^6 \int_0^5 (2x+y)\,dy\,dx = \frac{23}{28}$$

ε) Η ζητούμενη πιθανότητα προκύπτει από το Σχήμα 1



Σχήμα 1: Σχήμα άσκησης 1ε)

$$P(X+Y>4) = 1 - P(X+Y \leq 4) = 1 - \frac{1}{210}\int_2^4 \int_0^{4-x} (2x+y)\,dy\,dx = 1 - \frac{2}{35} = \frac{33}{35}$$

στ) Παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, εφόσον $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

Άσκηση 2

Ένα κύκλωμα υπολογιστή έχει διάρκεια ζωής η οποία αποτελεί μια συνεχή τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι ένα εργοστάσιο παράγει ένα μείγμα καλών και κακών κυκλωμάτων. Για κάποια θετική σταθερά α, η διάρκεια ζωής των καλών κυκλωμάτων είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο α ενώ η διάρκεια ζωής των κακών κυκλωμάτων είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο 1000α. Έστω ότι η πιθανότητα το κύκλωμα να είναι καλό είναι p, ενώ να είναι κακό είναι $1-p$.

α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένα τυχαία επιλεγμένο κύκλωμα εξακολουθεί να λειτουργεί μετά από t μονάδες χρόνου.

β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διάρκειας ζωής ενός τυχαία επιλεγμένου κυκλώματος.

γ) Για να γίνει διαλογή των καλών κυκλωμάτων, κάθε κύκλωμα δοκιμάζεται για t μονάδες χρόνου και μόνο εκείνα τα οποία δεν χαλάνε κατά τη δοκιμή αποστέλλονται στους πελάτες. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένας πελάτης λαμβάνει ένα κακό κύκλωμα ως συνάρτηση των παραμέτρων α, p και t. Αν $p = 0.9$, πόσο πρέπει να διαρκεί η δοκιμή (δηλαδή, πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το t) ώστε η πιθανότητα να στέλνονται κακά κυκλώματα στους πελάτες να είναι μικρότερη από 1%;

Λύση
Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι ο χρόνος ζωής ενός τυχαία επιλεγμένου κυκλώματος. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

$$\begin{aligned} A_t &: \text{Το κύκλωμα εξακολουθεί να λειτουργεί κατά τη χρονική στιγμή } t. \\ B &: \text{Το κύκλωμα είναι ¨κακό¨.} \\ G &: \text{Το κύκλωμα είναι ¨καλό¨.} \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση των εκθετικών κατανομών,

$$\begin{aligned} P\left(A_t \middle| G\right) &= \int_t^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha t} \\ P\left(A_t \middle| B\right) &= \int_t^{\infty} 1000\alpha e^{-1000\alpha x} dx = e^{-1000\alpha t}. \end{aligned}$$

α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας,

$$P\left(A_t\right) = P(G)P\left(A_t \middle| G\right) + P(B)P\left(A_t \middle| B\right) = pe^{-\alpha t} + (1-p)e^{-1000\alpha t}.$$

β) Μας ζητείται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X. Από το υποερώτημα (α), έχουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P\left(A_x\right) = 1 - pe^{-\alpha x} - (1-p)e^{-1000\alpha x}.$$

Επομένως:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = p\alpha e^{-\alpha x} + (1-p)1000\alpha e^{-1000\alpha x}.$$

γ) Κάνοντας χρήση του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε:

$$P\left(B \middle| A_t\right) = \frac{P\left(B \cap A_t\right)}{P\left(A_t\right)}.$$

Επιπλέον, $P\left(B \cap A_t\right) = P(B)P\left(A_t \middle| B\right) = (1-p)e^{-1000\alpha t}$. Επομένως,

$$P\left(B \middle| A_t\right) = \frac{(1-p)e^{-1000\alpha t}}{pe^{-\alpha t} + (1-p)e^{-1000\alpha t}} = \frac{1}{(p(1-p))e^{999\alpha t} + 1}.$$

Προκειμένου να ισχύει $P\left(B \middle| A_t\right) < 0.01$ όταν $p/(1-p) = 9$, πρέπει να ισχύσει $e^{999\alpha t} > 11$, το οποίο δίνει $t > (\ln 11)/(999\alpha)$.

Άσκηση 3
Έστω τυχαία μεταβλητή

$$(X,Y) \backsim f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} y^{-1}e^{-y-\frac{x}{y}}, & x,y>0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Βρείτε τα

α) $f_Y(y)$,

β) $f_{X|Y}$,

γ) $F_{X|Y}$,

δ) $P(X > 1 \mid Y = y)$,

ε) $E(X \mid Y = y), y > 0$.

Λύση

α) Ολοκληρώνω ως προς x για να βρω την περιθώρια της Y.

$$f_Y(y) = \int_0^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} y^{-1}e^{-y-\frac{x}{y}}\,dx = \frac{e^{-y}}{y}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}}\,dx = \frac{e^{-y}}{y}\left[-ye^{-\frac{x}{y}}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{e^{-y}}{y}\left(-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{y}{e^{\frac{x}{y}}}\right) + y\right) = e^{-y}$$

β)

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{y^{-1}e^{-y-\frac{x}{y}}}{e^{-y}} = \frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$$

γ)

$$F_{X|Y}(x \mid y) = \int_0^x f_{X|Y}(z \mid y)\,dz = \int_0^x \frac{1}{y}e^{-\frac{z}{y}}\,dz = \frac{1}{y}\left[-ye^{-\frac{z}{y}}\right]_0^x = -e^{-\frac{x}{y}} + 1 = 1 - e^{-\frac{x}{y}}$$

δ)

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid y)\,dx = \int_0^{+\infty} x\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}\,dx = \frac{1}{y}\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x}{y}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{y}\left(\left[-xye^{-\frac{x}{y}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} ye^{-\frac{x}{y}}\,dx\right) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{y}}\,dx = y$$

ε)

$$P(X > 1 \mid Y = y) = 1 - P(X \le 1 \mid Y = y) = 1 - F_{X|Y}(1, y) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{y}}) = e^{-\frac{1}{y}}$$

Άσκηση 4

Έστω

$$(X,Y) \backsim f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

α) Υπολογίστε τις περιθωριακές $f_X(x), f_Y(y)$.

β) Υπολογίστε τις $f_{Y|X}(y \mid x)$ και $f_{X|Y}(x \mid y)$.

γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2X < Y)$.

Λύση

α)

$$f_X(x) = \int_x^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_x^{+\infty} e^{-y}\,dy = e^{-x}$$

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^y e^{-y}\,dx = ye^{-y}$$

β)

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{-(y-x)}$$

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-y}}{ye^{-y}} = \frac{1}{y}$$

γ)

$$P(Y > 2X) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(Y > 2X \mid X = x) f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} (\int_{2x}^{+\infty} e^{-(y-x)}\, dy) e^{-x}\, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[-e^{-(y-x)}\right]_{2x}^{+\infty} e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x}\, dx = \frac{1}{2}$$