Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 6

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

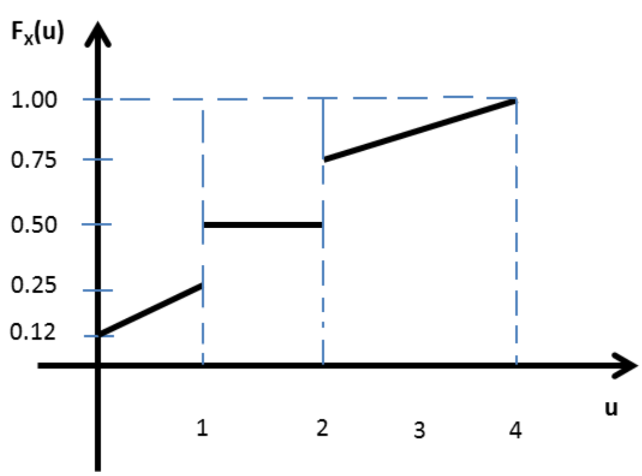
Άσκηση 1.
Έστω X η μικτή τ.μ. που εκφράζει τον αριθμό των ωρών που αφιερώνει κάποιος φοιτητής κάθε βδομάδα στο HY-217. Η Α.Σ.Κ της X είναι:

$$\mathbf{F}_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1+x}{8}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{8}, & 2 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_{\mathbf{X}}(x)$

Να βρεθούν οι πιθανότητες:
(α) Αφιερώνει ακριβώς 2 ώρες
(β) Αφιερώνει περισσότερο από 2 ώρες
(γ) Αφιερώνει λιγότερο από 2 ώρες
(δ) Αφιερώνει ακριβώς 3 ώρες
(ε) Αφιερώνει περισσότερο από 1/2 αλλά λιγότερες από 3 ώρες
(στ) Αφιερώνει περισσότερο από 2 ώρες, δεδομένου ότι ασχολείται με το μάθημα
ζ) Να υπολογισθεί η μέση τιμής της τ.μ. X, $E[X]$

Λύση
Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$, φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της Α.Σ.Κ

(α)

$$P(\text{Αφιερώνει ακριβώς 2 ώρες}) = P(X=2) = F_X(2^+) - F_X(2^-) = \frac{1}{2} + \frac{2}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(β)

$$P(\text{Αφιερώνει περισσότερο από 2 ώρες}) = P(X>2) = 1 - F_X(2^+) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad (1)$$

(γ)

$$P(\text{Αφιερώνει λιγότερο από 2 ώρες}) = P(X<2) = F_X(2^-) = \frac{1}{2}$$

(δ)

$$P(\text{Αφιερώνει ακριβώς 3 ώρες }) = P(X=3) = F_X(3^+) - F_X(3^-) = 0$$

(ε)

$$\begin{aligned} P(\text{Αφιερώνει περισσότερο από 1/2 αλλά λιγότερες από 3 ώρες}) = P(1/2 < X < 3) &= \\ F_X(3^-) - F_X(1/2^-) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1+1/2}{8} &= \frac{11}{16} \end{aligned}$$

(στ)

$$\begin{aligned} P(\text{Αφιερώνει περισσότερο από 2 ώρες, δεδομένου ότι ασχολείται με το μάθημα}) &= \\ \frac{P(X>2 \cap X>0)}{P(X>0)} = \frac{P(X>2)}{P(X>0)} &= \\ \frac{1-F_X(2^+)}{1-F_X(0^+)} = \frac{1-\frac{1}{2}-\frac{2}{8}}{1-\frac{1+0}{8}} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

ζ) Η μέση τιμή της τ.μ X, E[X] μπορεί να βρεθεί υπολογίζοντας το εμβαδόν E μεταξύ της $F_X(u)$ και της ευθείας με ύψος ίσο με 1.
Επομένως έχουμε:

$$E = E_{\text{τραπεζίου}} + E_{\text{ορθογωνίου}} + E_{\text{τριγώνου}} = \frac{7/8+6/8}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 1/2 + \frac{1/4 \cdot 2}{2} = \frac{25}{16} = 1,375 \text{ ώρες.}$$

Άσκηση 2.
Μια συνεχής τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\mathbf{f}_X(x) = \begin{cases} \alpha(1-0.1|x|), & |x| \le 10 \\ 0, & \textit{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$ και να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς α.

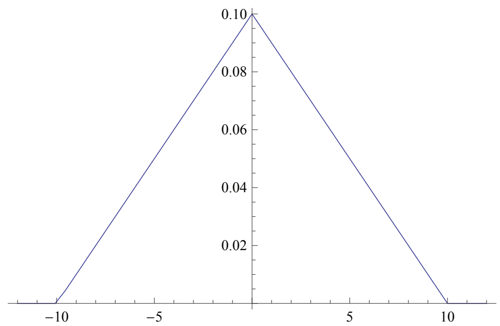
(β) Να βρεθούν η μέση τιμή $E[X]$ και η διασπορά σ_X^2 της τ.μ X

(γ) Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Α.Σ.Κ.), $F_X(x)$ της X και να σχεδιαστεί η γραφική της παράσταση.

(δ) Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου: $P(|X| \le 3)$

Λύση.

(α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας παριστάνεται στο παρακάτω σχήμα, σχ. 2



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.

Από το σχήμα έχουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

$$\begin{aligned} E &= 20 \cdot a\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ 1 &= 10 \cdot \alpha \Leftrightarrow \\ \alpha &= 0.1 \end{aligned}$$

Διαφορετικά, θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= 1 \Leftrightarrow && (2) \\ \alpha \int_{-10}^{0} 1 + 0.1xdx + \alpha \int_{0}^{10} 1 - 0.1xdx &= 1 && (3) \\ \alpha \cdot \left(\left[x + 0.1\frac{x^2}{2} \right]_{-10}^{0} + \left[x - 0.1\frac{x^2}{2} \right]_{0}^{10} \right) &= 1 && (4) \\ 10\alpha &= 1 && (5) \\ \alpha &= 0.1 && (6) \end{aligned}$$

(β) Εφοσον η $f_X(.)$ είναι άρτια συνάρτηση, ισχύει ότι $E[X] = 0$. Επιπλέον:

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - 0 = 2\int_{0}^{10} x^2 \cdot 0.1(1 - 0.1x)dx =$$

$$0.2\int_{0}^{10} x^2 - 0.1x^3 dx =$$

$$0.2\left[\frac{x^3}{3} - 0.1\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{10} = \frac{50}{3} \approx 16.67$$

(γ) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

Θεωρούμε τις περιπτώσεις:

(i) Για $x < -10 \Leftrightarrow F_X(x) = 0$

(ii) Για $-10 \leq x < 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) = \int_{-10}^{x} 0.1(1+0.1\cdot t)dt = \int_{-10}^{x} (0.1+0.1^2\cdot t)dt = 0.1t + 0.01\frac{t^2}{2}\Big|_{-10}^{x} = \\ 0.1x + 0.01\frac{x^2}{2} + 0.1\cdot 10 - 0.01\frac{(-10)^2}{2} = \\ 0.005x^2 + 0.1\cdot x + 1 - 1/2 = \\ 0.005x^2 + 0.1\cdot x + 1/2 = \\ 0.005\cdot(x^2+20x+100) = \\ 0.005(x+10)^2 \end{aligned}$$

(iii) Για $0 \leq x < 10 \Leftrightarrow$

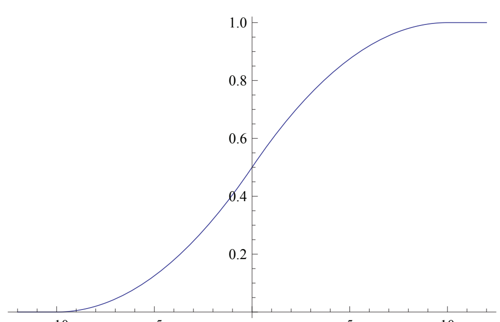
$$\begin{aligned} F_X(x) = \int_{-10}^{0} 0.1\cdot(1+0.1\cdot t)dt + \int_{0}^{x} 0.1\cdot(1-0.1\cdot t)dt = \\ \left[0.1\cdot t + 0.1^2\frac{t^2}{2}\right]_{-10}^{0} + \left[0.1\cdot t - 0.1^2\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x} = \\ 0.1\cdot 10 - 0.1^2\frac{100}{2} + 0.1\cdot x - 0.1^2\frac{x^2}{2} = \\ -0.005x^2 + 0.1\cdot x + 1 - 1/2 = \\ 1 - 0.005(x-10)^2 \end{aligned}$$

(iv) Για $x \geq 10 \Leftrightarrow F_X(x) = 1$

Επομένως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0 & , x < -10 \\ 0.005(x+10)^2 & , x \in [-10, 0), \\ 1 - 0.005(x-10)^2 & , x \in [0, 10), \\ 1 & , x \geq 10 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής φαίνεται στο παρακάτω σχήμα3



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$.

(δ) Έχουμε ότι:

$$P(|X| \leq 3) = P(-3 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(-3) = 1 - 0.005(3-10)^2 - 0.005(-3+10)^2 \approx 0.51$$

Άσκηση 3.
Έστω ότι ο αριθμός Η/Υ σε χιλιάδες κομμάτια που πουλάει η Dell στη διάρκεια μια ημέρας είναι τ.μ. $\mathbf{X}$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\mathbf{f}_X(x) = \begin{cases} c \cdot x, & 0 \le x < 3 \\ c \cdot (6-x), & 3 \le x < 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Να υπολογισθεί η τιμή της σταθεράς c.

(β) Να υπολογισθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$ της X

(γ) Ποια η πιθανότητα ο αριθμός των Η/Υ που πωλούνται σε 1 μέρα να:
(i) ξεπερνά τις 3000.
(ii) είναι μεταξύ των 1500 και 9000.

(δ) Αν τα Α, Β είναι τα γεγονότα (i), (ii) του ερωτήματος (γ), είναι τα Α,Β ανεξάρτητα;

Λύση
(α) Θα πρέπει $c > 0$, ώστε η $f_X(x) > 0$ να είναι έγκυρη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Ισχύει ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \tag{7}$$

$$\Rightarrow c\int_0^3 xdx + c\int_3^6 (6-x)dx = 1 \tag{8}$$

$$\Rightarrow c\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + c(6x - \frac{x^2}{2})\Big|_3^6 = 1 \tag{9}$$

$$\Rightarrow 9 \cdot c = 1 \tag{10}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{9} \tag{11}$$

(β) Γνωρίζουμε ότι για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής γίνεται: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = 0$
(i) Για $0 \le x < 3$:

$$F_X(x) = \frac{1}{9}\int_0^x tdt = \frac{1}{9}\frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{18}$$

(i) Για $3 \leq x < 6$:

$$\begin{aligned} F_X(x) = \frac{1}{9}\int_0^3 tdt + \int_3^x \frac{1}{9}(6-t)dt &= \\ \frac{1}{9}\frac{t^2}{2}\Big|_0^3 + \frac{1}{9}(6t - \frac{t^2}{2})\Big|_3^x &= \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{9}(6x - \frac{x^2}{2} - 18 + \frac{9}{2}) &= \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \cdot \quad \frac{(-x^2 + 12x - 36) + 9}{2} &= \\ \frac{1}{2} - \frac{(x-6)^2}{18} + \frac{1}{2} &= \\ 1 - \frac{(x-6)^2}{18} \end{aligned}$$

(i) Για $x \geq 6 \Leftrightarrow F_X(x) = 1$

Επομένως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής γράφεται:

$$\mathbf{f}_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{18}, & 0 \leq x < 3 \\ 1 - \frac{(6-x)^2}{18}, & 3 \leq x < 6 \\ 1, x \geq 6 \end{cases}$$

(γ) Ο αριθμός των Η/Υ που πουλάει η Dell μέσα σε μια μέρα μετριέται σε χιλιάδες κομμάτια. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
Α :Ο αριθμός των Η/Υ που πωλούνται σε 1 μέρα να ξεπερνά τις 3000
Β:Ο αριθμός των Η/Υ που πωλούνται σε 1 μέρα να είναι μεταξύ των 1500 και 9000.

Οπότε οι ζητούμενες πιθανότητες γίνονται:

$$P(A) = P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 0.5 \tag{12}$$

Και:

$$P(B) = P(1.5 \leq X \leq 9) = F_X(9) - F_X(1.5) = 1 - 0.125 = 0.875 \tag{13}$$

(δ) Για να είναι τα γεγονότα A και B ανεξάρτητα θα πρέπει να ισχύει: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Ισχύει ότι: $A \cap B = 3 < X \leq 9$
Επομένως, υπολογίζουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $A \cap B$ ως εξής:

$$P(A \cap B) = P(3 < X \leq 9) = P(X > 3) = 1 - \frac{(6-3)^2}{18} = \frac{1}{2} \tag{14}$$

Παρατηρούμε ότι $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \neq P(A) \cdot P(B)$
Επομένως τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 4.
Δίνεται η συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \textit{αλλιώς} \end{cases}$$

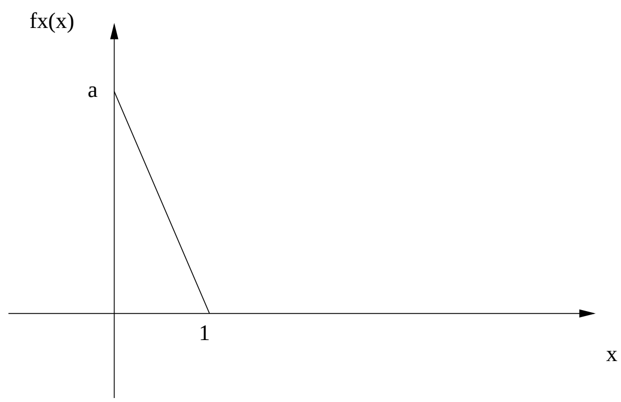
(α) Να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της X, και στη συνέχεια να βρεθεί η τιμή της σταθεράς α.

(β) Να υπολογισθεί η πιθανότητα: $P(6X^2 > 5X - 1)$

(γ) Να υπολογισθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Α.Σ.Κ.) της τ.μ X, $F_X(x)$

(Λύση)

(α) Η γραφική παράσταση της $f_X(x)$ παριστάνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4: Η γραφική παράσταση της $\sigma.\pi.\pi.$

Για να υπολογίσουμε την τιμή της παραμέτρου α μπορούμε είτε χρησιμοποιώντας τη σχέση $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$, είτε από το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της $f_X(x)$ και των αξόνων.

(α΄ τρόπος)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= 1 \\ \int_0^1 a \cdot (1-x)dx &= 1 \\ a \cdot \Big[-\frac{x^2}{2} + x \Big]_0^1 &= 1 \\ a \cdot (-\frac{1}{2} + 1) &= 1 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

(β΄ τρόπος)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\alpha \cdot 1 \\ 1 &= \frac{1}{2}\alpha \cdot 1 \\ \alpha &= 2 \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(6\mathrm{X}^2 > 5\mathrm{X} - 1) = P(6\mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 1 > 0) &= P\left[(3X-1)\cdot(2X-1) > 0\right] \\ &= P\Big(X > 1/3 \cap X > 1/2\Big) + P\Big(X < 1/3 \cap X < 1/2\Big) \\ &= P(X > 1/2) + P(X < 1/3) = 1 - P(1/3 \le X \le 1/2) \\ &= 1 - \int_{1/3}^{1/2} 2(1-x)dx = 1 - \Big[2x - 2x^2/2\Big]_{1/3}^{1/2} = 29/36, \end{aligned}$$

(γ) Για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής έχουμε:

(i) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = 0$

(ii) Για $0 \le x < 1 \Leftrightarrow$

$$F_X(x) = \int_0^x 2(1-t)dt = \Big[2t - t^2\Big]_0^x = 2x - x^2$$

(iii) Για $x \ge 1 \Leftrightarrow F_X(x) = 1$

Επομένως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 2x - x^2 & , x \in [0,1), \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases}$$