

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 5
Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (II)

Άσκηση 1.

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο εξαέδρο ζάρι, και έστω Τ.Μ. X που αντιπροσωπεύει τον αριθμό που θα φέρει. Να υπολογιστούν:

- (α) Η μέση τιμή της X , $E[X]$
(β) Η διασπορά της X , $VAR[X]$

Λύση.

Εφ' όσον το ζάρι είναι αμερόληπτο, και τα 6 ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα εμφάνισης $\frac{1}{6}$.

(α) Από τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$E[X] = \sum_{x=1}^6 xp_X(x) = \sum_{x=1}^6 x \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

(β) Αντίστοιχα με πριν, έχουμε:

$$E[X^2] = \sum_{x=1}^6 x^2 p_X(x) = \sum_{x=1}^6 x^2 \frac{1}{6} = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}.$$

Από γνωστές ιδιότητες υπολογισμού της διασποράς, έχουμε:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

Άσκηση 2.

Μία Τ.Μ. X παίρνει τις τιμές $\{0, 1, 2, \kappa\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, a\}$.

- (α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα a .
(β) Αν $E[X] = \frac{8}{3}$, να βρεθεί η τιμή k .
(γ) Με βάση τα ερωτήματα α)-β), να υπολογιστεί η διασπορά της X , $VAR[X]$.

Λύση.

(α) Θα πρέπει να ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_x p_X(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + a = 1 \Rightarrow \frac{5}{30} + \frac{6}{30} + \frac{10}{30} + a = 1 \Rightarrow \frac{21}{30} + a = 1 \Rightarrow a = 1 - \frac{21}{30} \Rightarrow$$
$$a = \frac{9}{30} \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{10}}$$

(β) Δεδομένης της τιμής του a που προσδιορίσαμε στο α) ερώτημα, έχουμε:

$$E[X] = \frac{8}{3} \Rightarrow \sum_x xp_X(x) = \frac{8}{3} \Rightarrow 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{3} + k \times \frac{3}{10} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + k \times \frac{3}{10} = \frac{8}{3} \Rightarrow$$
$$k \times \frac{3}{10} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \Rightarrow k \times \frac{3}{10} = 2 - \frac{1}{5} \Rightarrow k \times \frac{3}{10} = \frac{9}{5} \Rightarrow k = \frac{90}{15} \Rightarrow \boxed{k = 6}$$

(γ) Αντίστοιχα με πριν, έχουμε:

$$E[X^2] = \sum_x x^2 p_X(x) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 6^2 \times \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{4}{3} + \frac{108}{10} = \frac{6}{30} + \frac{40}{30} + \frac{324}{30} = \frac{37}{3}.$$

Από γνωστές ιδιότητες υπολογισμού της διασποράς, έχουμε:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{37}{3} - \frac{64}{9} = \frac{111}{9} - \frac{64}{9} = \frac{47}{9}.$$

Άσκηση 3.

Η θερμοκρασία μιας πόλης μοντελοποιείται ως μία τ.μ. με μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίσες με $10^\circ C$. Μία ημέρα θεωρείται «κανονική» αν η θερμοκρασία κατά τη διάρκειά της κυμαίνεται εντός μίας τυπικής απόκλισης από τη μέση τιμή. Να υπολογιστεί η διακύμανση της θερμοκρασίας για μία «κανονική» ημέρα, αν η θερμοκρασία εκφραζόταν σε $^\circ F$.

Σημείωση: Δίνεται ότι η σχέση που συνδέει $^\circ C - ^\circ F$ είναι η εξής:

$$^\circ F = \frac{9}{5}^\circ C + 32.$$

Λύση.

Έστω X η θερμοκρασία σε $^\circ C$. Τότε, η θερμοκρασία σε $^\circ F$ σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης θα είναι: $Y = \frac{9}{5}X + 32$. Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της μέσης τιμής και της διασποράς, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[\frac{9}{5}X + 32] = \frac{9}{5}E[X] + 32 = \frac{9}{5}10 + 32 = 50 \\ VAR[Y] &= VAR[\frac{9}{5}X + 32] = (\frac{9}{5})^2 VAR[X] = (\frac{9}{5})^2 \times 10^2 = \frac{81}{25} \times 100 = 324 \end{aligned}$$

Άρα, η τυπική απόκλιση σε $^\circ F$ θα είναι:

$$\sigma_Y = \sqrt{VAR[Y]} = \sqrt{324} = 18$$

Άρα, για μία «κανονική» μέρα, η θερμοκρασία σε $^\circ F$ θα βρισκόταν στο εξής διάστημα:

$$[E[Y] - \sigma_Y, [E[Y] + \sigma_Y] = [32, 68].$$

Άσκηση 4.

Ο Κώστας και ο Νίκος παίζουν το εξής παιχνίδι: Ο Νίκος θα ρίξει διαδοχικά 4 φορές ένα κέρμα με $P(k) = 0.4$. Πριν τις ρίψεις θα πρέπει να αποφασίσει μεταξύ 2 στρατηγικών:

- (i) Να κερδίσει σε ευρώ ποσό X , ίσο με το πλήθος των “k” (κορώνα) που θα φέρει
- (ii) Να κερδίσει σε ευρώ ποσό Y , ίσο με το τετράγωνο του πλήθους των “k” που θα φέρει μειωμένο 1.5 φορές κατά τα ίδιο πλήθος

(α) Ποια είναι η πιο συμφέρουσα στρατηγική για το Νίκο; Δηλαδή, ποια στρατηγική μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος του;

(β) Στη γενική περίπτωση, όπου η πιθανότητα να έρθει «κορώνα» είναι p , για ποιο εύρος τιμών του p είναι πιο συμφέρουσα η στρατηγική i) από την στρατηγική ii);

Λύση.

Έστω X τ.μ. που απεικονίζει το πλήθος των “k” σε 4 ρίψεις του κέρματος. Η πιθανότητα «επιτυχίας» (να έρθει “k”) σε 4 διαδοχικές ρίψεις είναι 0.4, σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης. Άρα η X ακολουθεί Διωνυμική Κατανομή με $n = 4$ και $p = 0.4$. Ως εκ τούτου, η ΣΜΠ της θα είναι η εξής:

$$p_X(k) = \binom{4}{k} \times (0.4)^k \times (0.6)^{4-k}, k = 0, 1, \dots$$

(α) Σύμφωνα με την στρατηγική i), το κέρδος του Νίκου θα είναι X . Σύμφωνα με τη στρατηγική ii), το κέρδος του Νίκου θα είναι $Y = X^2 - 1.5X$. Προσδιορίζουμε την μεση τιμή του κέρδους σε κάθε περίπτωση, ώστε ν’ αποφασίσουμε ποια στρατηγική είναι η πιο συμφέρουσα:

$$\begin{aligned} E[X] &= np = 4 \times 0.4 = 1.6 \\ E[Y] &= E[X^2 - 1.5X] = E[X^2] - 1.5E[X] = VAR[X] + (E[X])^2 - 1.5E[X] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= np(1-p) + (np)^2 - 1.5np \\
 &= 4 \times 0.4 \times 0.6 + (4 \times 0.4)^2 - 1.5 \times 4 \times 0.4 \\
 &= 0.96 + 2.56 - 2.4 = 1.12
 \end{aligned}$$

, όπου χρησιμοποιήθηκε η γνωστή σχέση $VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$.

Παρατηρούμε ότι $E[X] > E[Y]$, και ως εκ τούτου η στρατηγική ι) είναι η πιο συμφέρουσα για τον Νίκο.

(β) Ακολουθώντας παρόμοιο σκεπτικό με το α) ερώτημα, η στρατηγική ι) είναι συμφερότερη από τη ιι) αν ισχύει $E[X] > E[Y]$. Θα επιλύσουμε την παραπάνω ανισότητα, ώστε να βρούμε το ζητούμενο εύρος τιμών της πιθανότητας «επιτυχίας» p :

$$\begin{aligned}
 E[X] > E[Y] &\Rightarrow E[X] > VAR[X] + (E[X])^2 - 1.5E[X] \Rightarrow np > np(1-p) + (np)^2 - 1.5np \Rightarrow \\
 2.5np &> np - np^2 + n^2p^2 \Rightarrow 1.5np > np^2(n-1) \Rightarrow 1.5p - p^2(n-1) > 0 \Rightarrow \frac{3}{2}p + p^2(1-n) > 0 \Rightarrow \\
 \frac{3}{2}p + p^2(1-4) &> 0 \Rightarrow \frac{3}{2}p - 3p^2 > 0 \Rightarrow 3p(\frac{1}{2} - p) > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - p > 0 \Rightarrow p < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, το ζητούμενο εύρος τιμών είναι: $0 < p < \frac{1}{2}$.

Άσκηση 5.

Η μέση ημερήσια θερμοκρασία στην Αθήνα το μήνα Μάρτιο, μετρούμενη σε ακέραιους βαθμούς Κελσίου είναι μια τ.μ. X με την ακόλουθη Συνάρτηση Πιθανότητας:

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{20}|k-10|, & 10-b \leq k \leq 10+b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε τη σταθερά b και δώστε τη γραφική παράσταση της Σ.Π. της τ.μ. X .

Βοήθεια: Παρατηρήστε τη συμμετρία της Σ.Π. της X και χρησιμοποιήστε την σχέση $\sum_{i=1}^b i = \frac{b(b+1)}{2}$.

(β) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή, $E[X]$, και η διασπορά, $VAR[X]$, της τ.μ. X ;

(γ) Το κόστος σε Ευρώ της θέρμανσης ενός σπιτιού το μήνα Μάρτιο είναι $Y = 10(25 - X)^2$. Υπολογίστε το μέσο κόστος, $E[Y]$.

Λύση.

(α) Για να είναι η $p_X(k)$ μια έγκυρη σ.π.π πρέπει να ισχύει η σχέση:

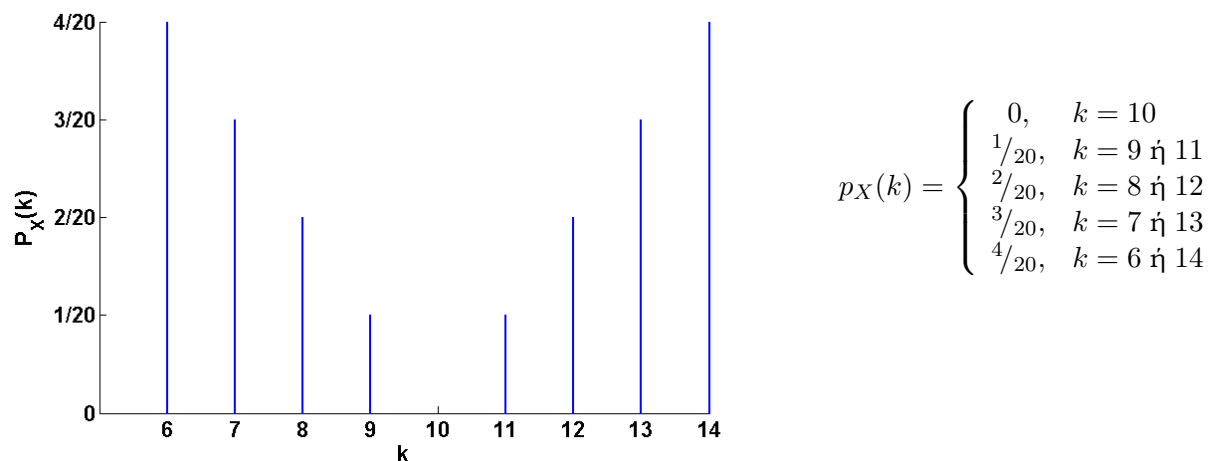
$$\sum_{k=10-b}^{10+b} p_X(k) = 1$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=10-b}^{10+b} \frac{1}{20}|k-10| &= 2 \cdot \sum_{k=11}^{10+b} \frac{1}{20}(k-10) && [\text{λόγω συμμετρίας της } p_X(k) \text{ γύρω από το } k=10] \\
 &= 2 \cdot \sum_{m=1}^b \frac{1}{20}m = \frac{1}{10} \sum_{m=1}^b m && [m = k-10] \\
 &= \frac{1}{10} \frac{b(b+1)}{2} = \frac{b(b+1)}{20} = 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = 4$$

Η γραφική παράσταση της $p_X(k)$ φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση και η Σ.Π. για το υποερώτημα 5(α).

(β) Προφανώς, λόγω συμμετρίας της $p_X(k)$ γύρω από το $k = 10$, προκύπτει $E[X] = 10$.

Επίσης, έχουμε:

$$E[X^2] = \sum_k k^2 p_X(k) = 10^2 \cdot 0 + (9^2 + 11^2) \cdot \frac{1}{20} + (8^2 + 12^2) \cdot \frac{2}{20} + (7^2 + 13^2) \cdot \frac{3}{20} + (6^2 + 14^2) \cdot \frac{4}{20} = 110$$

$$VAR(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 110 - 10^2 = 10$$

(γ) Με βάση την διατήρηση της γραμμικότητας για τη μέση τιμή, έχουμε:

$$\text{Αν } Y = aX + b, \text{ τότε } E[Y] = aE[X] + b.$$

Εφαρμόζοντας την εν λόγω ιδιότητα στο πρόβλημά μας, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[10 \cdot (25 - X)^2] \\ &= E[6250 - 500 \cdot X + 10 \cdot X^2] \\ &= 6250 - 500 \cdot E[X] + 10 \cdot E[X^2] \\ &= 6250 - 500 \cdot 10 + 10 \cdot 110 = 2350. \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

Έστω η τ.μ. X με πεδίο τιμών $\{1, 2\}$ και η τ.μ. Y με πεδίο τιμών $\{1, 2, 3\}$. Υποθέστε ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τις τ.μ. (X, Y) δίνεται από την σχέση $p(x, y) = c(x + y)$, όπου $x \in \{1, 2\}$, $y \in \{1, 2, 3\}$ και c είναι μία σταθερά.

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Βρείτε τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας για τις τ.μ. X και Y , $p_X(x), p_Y(y)$.

Λύση.

(α) Πρέπει να ισχύει η συνθήκη κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 p(x, y) &= 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 c(x + y) = 1 \Rightarrow c \left(\sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 x + \sum_{y=1}^3 \sum_{x=1}^2 y \right) = 1 \\ &\Rightarrow c \left(3 \sum_{x=1}^2 x + 2 \sum_{y=1}^3 y \right) = 1 \Rightarrow c(3 \times 3 + 2 \times 6) = 1 \Rightarrow 21c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{21}} \end{aligned}$$

(β) Για να προσδιορίσουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την τ.μ. X αθροίζουμε ως προς όλα τα πιθανά y , και αντίστοιχα για την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την τ.μ. Y αθροίζουμε ως προς όλα τα πιθανά x . Έτσι έχουμε:

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^3 p(x, y) = \sum_{y=1}^3 \frac{1}{21}(x+y) = \frac{1}{21} \sum_{y=1}^3 (x+y) = \frac{3x+6}{21}, x=1, 2$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^2 p(x, y) = \sum_{x=1}^2 \frac{1}{21}(x+y) = \frac{1}{21} \sum_{x=1}^2 (x+y) = \frac{3+2y}{21}, y=1, 2, 3$$

Άσκηση 7.

Θεωρείστε 2 διακριτές τ.μ. X και Y με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται στον Πίνακα 1:

Πίνακας 1: Από κοινού σ.π.π των τ.μ. X και Y

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	1/9	2/9	1/9
$X = 2$	0	1/9	2/9
$X = 3$	1/9	0	1/9

- (α) Βρείτε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X , $p_X(x)$.
 (β) Βρείτε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y , $p_Y(y)$.
 (γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. X ($E[X]$) και τη μέση τιμή της τ.μ. Y ($E[Y]$).
 (δ) Υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ. X ($VAR[X]$) και τη διασπορά της τ.μ. Y ($VAR[Y]$).
 (ε) Έστω η τ.μ. $Z = g(X, Y) = 3X + 2Y + 7$. Υπολογίστε την μέση τιμή της τ.μ. Z ($E[Z]$).

Λύση.

(α) Για να προσδιορίσουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την τ.μ. X αθροίζουμε ως προς όλα τα πιθανά y . Συνεπώς, έχουμε:

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^3 p_{XY}(x, y), x=1, 2, 3$$

Από τον Πίνακα 1 λοιπόν έχουμε:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{9}, & x=1 \\ \frac{3}{9}, & x=2 \\ \frac{2}{9}, & x=3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(β) Για να προσδιορίσουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την τ.μ. Y αθροίζουμε ως προς όλα τα πιθανά x . Συνεπώς, έχουμε:

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^3 p_{XY}(x, y), y=1, 2, 3$$

Από τον Πίνακα 1 λοιπόν έχουμε:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{9}, & y=1 \\ \frac{3}{9}, & y=2 \\ \frac{4}{9}, & y=3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$E[X] = \sum_{x=1}^3 xp_X(x) = 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{3}{9} + 3 \times \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$$

$$E[Y] = \sum_{y=1}^3 yp_Y(y) = 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{3}{9} + 3 \times \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$$

(δ) Για τον υπολογισμό της διασποράς, θα κάνουμε χρήση του γνωστού τύπου από τη θεωρία :

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Με βάση τα δεδομένα της άσκησης, έχουμε :

$$E[X^2] = \sum_{x=1}^3 x^2 p_X(x) = 1^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{3}{9} + 3^2 \times \frac{2}{9} = \frac{34}{9}$$

$$E[Y^2] = \sum_{y=1}^3 y^2 p_Y(y) = 1^2 \times \frac{2}{9} + 2^2 \times \frac{3}{9} + 3^2 \times \frac{4}{9} = \frac{50}{9}$$

Άρα οι διασπορές των τ.μ. X και Y θα είναι :

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{34}{9} - \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{34}{9} - \frac{256}{81} = \frac{306}{81} - \frac{256}{81} = \frac{50}{81}$$

$$VAR[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{50}{9} - \left(\frac{20}{9}\right)^2 = \frac{50}{9} - \frac{400}{81} = \frac{450}{81} - \frac{400}{81} = \frac{50}{81}$$

(ε) Με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας της μέσης τιμής, έχουμε :

$$E[Z] = E[3X + 2Y + 7] = 3E[X] + 2E[Y] + 7 = 3 \times \frac{16}{9} + 2 \times \frac{20}{9} + 7 = \frac{48}{9} + \frac{40}{9} + \frac{63}{9} = \frac{151}{9}$$

Άσκηση 8.

Οι τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{cy}{x}, & x \in \{1, 4, 6\}, y \in \{1, 2, 3\} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε την σταθερά c .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y < X)$.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y > X)$.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y = X)$.

(ε) Υπολογίστε τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.

(στ) Υπολογίστε τις μέσες τιμές $E[X]$ και $E[Y]$.

(ζ) Υπολογίστε τις διασπορές $VAR[X]$ και $VAR[Y]$.

Λύση.

(α) Από την έκφραση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας βλέπουμε ότι υπάρχουν 9 υποψήφια ζεύγη $\{x, y\}$ με μη-μηδενική τιμή της $p_{XY}(x, y)$. Τα εν λόγω ζεύγη είναι τα εξής : $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)$. Η πιθανότητα ενός ζεύγους είναι ανάλογη του κλάσματος $\frac{y}{x}$ των συνεταγμένων του ζεύγους. Με βάση την ιδιότητα της κανονικοποίησης θα έχουμε :

$$\sum_x \sum_y p_{XY}(x, y) = 1$$

$$\Rightarrow c \times \frac{1}{1} + c \frac{2}{1} + c \frac{3}{1} + c \frac{1}{4} + c \frac{2}{4} + c \frac{3}{4} + c \frac{1}{6} + c \frac{2}{6} + c \frac{3}{6} = 1 \Rightarrow c + 2c + 3c + \frac{6c}{4} + \frac{6c}{6} = 1$$

$$\Rightarrow 7c + \frac{3c}{2} = 1 \Rightarrow \frac{14c}{2} + \frac{3c}{2} = 1 \Rightarrow \frac{17c}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{2}{17}}$$

(β) Υπάρχουν 3 ζεύγη για τα οποία ισχύει η σχέση $2Y < X$, και πιο συγκεκριμένα τα: $(4, 1), (6, 1), (6, 2)$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(2Y < X) = P(\{4, 1\}) + P(\{6, 1\}) + P(\{6, 2\}) = \frac{2}{17}(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}) = \frac{2}{17}(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{2}{17} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{34}$$

(γ) Υπάρχουν 4 ζεύγη για τα οποία ισχύει η σχέση $2Y > X$, και πιο συγκεκριμένα τα: $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 3)$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(2Y > X) = P(\{1, 1\}) + P(\{1, 2\}) + P(\{1, 3\}) + P(\{4, 3\}) = \frac{2}{17}(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{3}{4}) = \frac{2}{17}(6 + \frac{3}{4}) = \frac{27}{34}$$

(δ) Υπάρχουν 2 ζεύγη για τα οποία ισχύει η σχέση $2Y = X$, και πιο συγκεκριμένα τα: $(4, 2), (6, 3)$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(2Y = X) = P(\{4, 2\}) + P(\{6, 3\}) = \frac{2}{17}(\frac{2}{4} + \frac{3}{6}) = \frac{2}{17}1 = \frac{2}{17}$$

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$P(2Y < X) + P(2Y > X) + P(2Y = X) = \frac{3}{34} + \frac{27}{34} + \frac{2}{17} = 1$$

(ε) Για να προσδιορίσουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την τ.μ. X αθροίζουμε ως προς όλα τα πιθανά y , και αντίστοιχα για να προσδιορίσουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την τ.μ. Y αθροίζουμε ως προς όλα τα πιθανά x . Στην προκειμένη περίπτωση, ο αριθμός των πιθανών ζευγών με μη-μηδενική τιμή της $p_{XY}(x, y)$ είναι αρκετά μικρός, με αποτέλεσμα να μπορούμε να υπολογίσουμε τις αριθμητικές τιμές των περιθωρίων συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας κατευθείαν. Για παράδειγμα, έχουμε:

$$p_X(4) = P(\{4, 1\}) + P(\{4, 2\}) + P(\{4, 3\}) = \frac{2}{17}(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}) = \frac{2}{17} \cdot \frac{6}{4} = \frac{6}{34} = \frac{3}{17}$$

Με βάση τα παραπάνω, οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας θα είναι τελικά:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{12}{17}, & x = 1 \\ \frac{3}{17}, & x = 4 \\ \frac{2}{17}, & x = 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & y = 1 \\ \frac{1}{3}, & y = 2 \\ \frac{1}{2}, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(στ) Χρησιμοποιώντας τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$E[X] = \sum_{x=1,4,6} xp_X(x) = 1 \times \frac{12}{17} + 4 \times \frac{3}{17} + 6 \times \frac{2}{17} = \frac{12}{17} + \frac{12}{17} + \frac{12}{17} = \frac{16}{17}$$

$$E[Y] = \sum_{y=1,2,3} yp_Y(y) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

(ζ) Για τον υπολογισμό της διασποράς, θα κάνουμε χρήση του γνωστού τύπου από τη θεωρία:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Με βάση τα δεδομένα της άσκησης, έχουμε:

$$E[X^2] = \sum_{x=1,4,6} x^2 p_X(x) = 1^2 \times \frac{12}{17} + 4^2 \times \frac{3}{17} + 6^2 \times \frac{2}{17} = \frac{12}{17} + \frac{48}{17} + \frac{72}{17} = \frac{132}{17}$$

$$E[Y^2] = \sum_{y=1,2,3} y^2 p_Y(y) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2} = \frac{36}{6} = 6$$

Άρα οι διασπορές των τ.μ. X και Y θα είναι:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{132}{17} - (\frac{16}{17})^2 = \frac{132}{17} - \frac{1296}{289} = \frac{2244}{289} - \frac{1296}{289} = \frac{948}{289}$$

$$VAR[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 6 - (\frac{7}{3})^2 = 6 - \frac{49}{9} = \frac{54}{9} - \frac{49}{9} = \frac{5}{9}$$