

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 4
Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (I)
Επιμέλεια: Στιβακτάκης Ραδάμανθους

Άσκηση 1.

Το πείραμά μας συνίσταται στη ρίψη 3 “τίμιων” κερμάτων. Συμβολίζουμε με Y τον αριθμό που μας λέει πόσες φορές εμφανίστηκε κορώνα. Να βρεθούν οι τιμές που παίρνει η τ.μ. Y και να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητάς της.

Λύση.

Έστω τα ενδεχόμενα: $K = \{\text{έρχεται κορώνα}\}$ και $\Gamma = \{\text{έρχεται γράμματα}\}$.

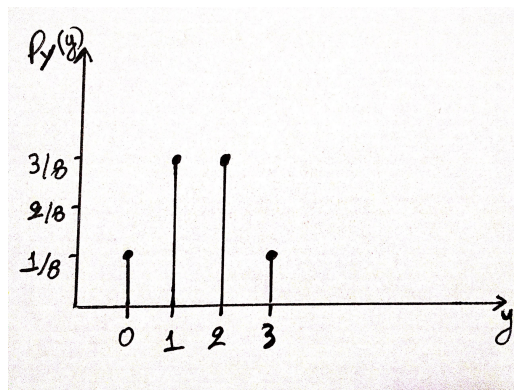
Τα κέρματα είναι “τίμια”, άρα $P(K) = \frac{1}{2}$ και $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$.

Η τ.μ. Y λαμβάνει τις τιμές $y = 0, 1, 2, 3$, καθώς μπορεί να εμφανιστεί κορώνα από 0-3 φορές συνολικά. Βρίσκουμε λοιπόν αναλυτικά:

- $P_Y(0) = P(Y = 0) = P(\{\Gamma, \Gamma, \Gamma\}) = P(\Gamma) * P(\Gamma) * P(\Gamma) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
- $P_Y(1) = P(Y = 1) = P(\{K, \Gamma, \Gamma\}) + P(\{\Gamma, K, \Gamma\}) + P(\{\Gamma, \Gamma, K\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $P_Y(2) = P(Y = 2) = P(\{K, K, \Gamma\}) + P(\{K, \Gamma, K\}) + P(\{\Gamma, K, K\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $P_Y(3) = P(Y = 3) = P(\{K, K, K\}) = P(K) * P(K) * P(K) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Άρα, η PMF θα είναι:

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & y = 0, 3 \\ \frac{3}{8} & y = 1, 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



Άσκηση 2.

Έστω διακριτή τυχαία μεταβλητή X με PMF:

$$p_X(x) = c * x, \quad x = 1, 2, \dots, n$$

Να υπολογιστεί η σταθερά c .

Λύση.

Θα πρέπει να ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_x p_X(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^n c * x = 1 \Rightarrow c * \sum_{x=1}^n x = 1 \Rightarrow c * \frac{n(n+1)}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{2}{n(n+1)}}$$

Υποσημείωση: Για την εύρεση του αθροίσματος $\sum_{x=1}^n x$ χρησιμοποιήθηκε ο τύπος υπολογισμού του αθροίσματος n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου: $\sum_{x=1}^n x = \frac{n(n+1)}{2}$.

Άσκηση 3.

Το ένα δέκατο των εργαλείων που κατασκευάζει μία εταιρεία είναι ελαττωματικά. Υπολογίστε την πιθανότητα, σε ένα τυχαίο δείγμα 10 εργαλείων να βγουν 2 ακριβώς εργαλεία ελαττωματικά,

(α) χρησιμοποιώντας τη διωνυμική κατανομή.

(β) προσεγγίζοντας τη διωνυμική κατανομή με μία κατανομή Poisson.

Λύση.

(α') Η πιθανότητα ελαττωματικού εργαλείου είναι $p = 0.1$. Εάν η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει το πλήθος των ελαττωματικών εργαλείων σε δείγμα 10 εργαλείων, τότε η διωνυμική κατανομή δίνει:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} * 0.1^2 * 0.9^8 = 45 * 0.01 * 0.43 \approx \boxed{0.194}$$

(β') Η κατανομή Poisson που προσεγγίζει τη διωνυμική αυτή κατανομή έχει $\lambda = n * p = 10 * 0.1 = 1$. Άρα:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^x}{x!} \quad \text{και} \quad P(X = 2) = \frac{e^{-1} * 1^2}{2!} \approx \boxed{0.184}$$

Η προσέγγιση κατά Poisson, γενικά αποδίδει καλύτερα αποτελέσματα στις περιπτώσεις που $n \rightarrow \infty$ και $p \rightarrow 0$.

Άσκηση 4.

Η πιθανότητα να αντιδράσει άσχημα ένας ασθενής σε μία ένεση είναι 0.001. Εάν η ένεση γίνει σε 2000 ασθενείς, υπολογίστε την πιθανότητα να αντιδράσουν άσχημα,

(α) ακριβώς 3 ασθενείς.

(β) περισσότεροι από 2 ασθενείς.

Λύση.

Έστω τυχαία μεταβλητή X που παριστάνει το πλήθος των ασθενών που θα αντιδράσουν άσχημα. Η X έχει διωνυμική κατανομή, αλλά, επειδή η "άσχημη αντίδραση" είναι σπάνιο γεγονός (συνδυαστικά με το γεγονός ότι έχουμε ένα αρκούντως μεγάλο δείγμα ασθενών), μπορούμε να δεχθούμε ότι ακολουθεί κατανομή Poisson, οπότε:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^x}{x!}, \quad \text{όπου } \lambda = n * p = 2000 * 0.001 = 2$$

$$(α') P(X = 3) = \frac{e^{-2} * 2^3}{3!} \approx \boxed{0.18}$$

$$(β') P(X > 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = 1 - \left(\frac{e^{-2} * 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} * 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} * 2^2}{2!} \right) = 1 - \left(\frac{e^{-2} * 1}{1} + \frac{e^{-2} * 2}{1} + \frac{e^{-2} * 4}{2} \right) = 1 - 5e^{-2} \approx \boxed{0.323}$$

Ένας ακριβής υπολογισμός των ίδιων πιθανοτήτων με τη χρήση της διωνυμικής κατανομής θα περιλάμβανε πολύ περισσότερο κόπο, δεδομένων των πολύ μεγάλων υπολογισμών που θα προέκυπταν (π.χ. 2000! κτλ.).

Άσκηση 5.

Ένας αφηρημένος λογιστής έχει στην τσέπη του n κλειδιά, από τα οποία μόνο ένα (δε θυμάται ποιο...) ταιριάζει στην πόρτα του γραφείου του. Επιλέγει τυχαία ένα κλειδί και το δοκιμάζει στην κλειδαριά. Αν δεν ταιριάζει, επιλέγει ένα άλλο και ξαναπροσπαθεί μέχρις ότου επιλέξει το σωστό κλειδί και ξεκλειδώσει την πόρτα του. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως το πλήθος των κλειδιών που δοκιμάζει (συμπεριλαμβανομένου και του τελευταίου με το οποίο ανοίγει τελικά την πόρτα). Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας $p_X(k)$, αν για κάθε κλειδί το οποίο δεν ανοίγει την πόρτα, το τοποθετεί ξανά πίσω στην τσέπη του.

Λύση.

Όταν ο λογιστής βάζει πίσω στην τσέπη του το λάθος κλειδί, δηλαδή επιλέγει με επανάθεση, έχουμε ουσιαστικά μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{1}{n}$ και αποτυχίας $1 - p = 1 - \frac{1}{n}$. Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί Γεωμετρική κατανομή και κατ' επέκταση:

$$p_X(k) = (1 - p)^{k-1} * p = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} * \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Άσκηση 6.

Σε μία τηλεφωνική συνομιλία, κατά τη διάρκεια κάθε λεπτού υπάρχει μία πιθανότητα 0.05 να “πέσει” η γραμμή. Υποθέτουμε πως η συμπεριφορά της τηλεφωνικής γραμμής από λεπτό σε λεπτό είναι ανεξάρτητη.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα να “πέσει” η γραμμή για 1^η φορά κατά το 5^ο λεπτό της συνομιλίας;
 (β) Ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει “πέσει” η γραμμή κατά τα πρώτα 10 λεπτά της συνομιλίας;

Λύση.

Έστω X τυχαία μεταβλητή που δείχνει σε ποιο λεπτό της συνομιλίας έπεσε η γραμμή. Η X ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο επιτυχίας $p = 0.05$, αφού κάθε λεπτό αποτελεί ανεξάρτητη δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.05$ (**Προσοχή!** Σε αυτή τη δοκιμή Bernoulli που μελετάμε, έχουμε θεωρήσει ως “επιτυχία” την περίπτωση που η γραμμή “πέφτει”).

(α') Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X = 5) = (1 - 0.05)^4 * 0.05 \approx 0.041$$

(β') Η γραμμή δε θα “πέσει” τα πρώτα 10 λεπτά, αν και μόνο αν, έχουμε 10 αποτυχίες στη σειρά (δηλαδή για 10 συνεχόμενα λεπτά η γραμμή διατηρείται ανέπαφη). Έτσι:

$$P(X > 10) = (1 - 0.05)^{10} \approx 0.599$$

Άσκηση 7.

Έστω ότι ρίχνουμε βολές εναντίον στόχου με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.3$. Να υπολογιστεί ο αριθμός n των βολών που απαιτούνται, έτσι ώστε η πιθανότητα να χτυπηθεί ο στόχος τουλάχιστον 1 φορά να είναι τουλάχιστον 90% .

Λύση.

Έστω X τυχαία μεταβλητή που μετράει το πλήθος των επιτυχών βολών μας. Η X ακολουθεί Διωνυμική Κατανομή με πιθανότητα $p = 0.3$. Η δεύτερη παράμετρος της κατανομής (n), θα υπολογιστεί από τα δεδομένα της άσκησης ως εξής:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &\geq 0.9 \Rightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0.9 \Rightarrow 1 - \left(\binom{n}{0} * p^0 * (1-p)^n \right) \geq 0.9 \Rightarrow 1 - 0.7^n \geq 0.9 \Rightarrow 0.7^n \leq \\ 0.1 &\Rightarrow n * \ln 0.7 \leq \ln 0.1 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0.1}{\ln 0.7} \text{ (άλλαξε η φορά, διότι διαιρέσαμε με το } \ln 0.7 \text{ που είναι αρνητικός αριθμός)} \Rightarrow \\ n &\geq \frac{-2.303}{-0.357} \Rightarrow n \geq 6.451 \Rightarrow \boxed{n \geq 7}, \text{ αφού το } n \text{ είναι φυσικός αριθμός.} \end{aligned}$$

Άσκηση 8.

Ένα δοχείο περιέχει αρχικά μία κόκκινη και μία μπλε μπάλα. Σε κάθε στάδιο του πειράματος, επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα και την επανατοποθετούμε μέσα στο δοχείο μαζί με ακόμη μία μπάλα του ίδιου χρώματος. Δηλαδή, αν την πρώτη φορά επιλέξουμε την κόκκινη μπάλα, τότε αυτή τοποθετείται πάλι στο δοχείο μαζί με μία ακόμη κόκκινη μπάλα, οπότε το δοχείο περιέχει συνολικά 2 κόκκινες μπάλες και μία μπλε. Έστω X το πλήθος των σταδίων έως την επιλογή της μπλε μπάλας.

(α) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > n)$, όπου n φυσικός αριθμός και δείξτε ότι η πιθανότητα του γεγονότος να επιλεγεί τελικά η μπλε μπάλα, κάποια στιγμή στο μέλλον, είναι 1.

Λύση.

Με τη βοήθεια της κοινής λογικής, καταλαβαίνουμε ότι αν για πρώτη φορά επιλέξουμε μπλε μπάλα στο i -οστό στάδιο, τότε στα προηγούμενα $(i - 1)$ στάδια είχαμε επιλέξει αναγκαστικά κόκκινη μπάλα.

(α') Βρίσκουμε, λοιπόν, αναλυτικά:

- $P(X = 1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{1 * (1+1)}$
- $P(X = 2) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{2 * (2+1)}$
- $P(X = 3) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{1}{4} = \frac{1}{3 * (3+1)}$
- $P(X = 4) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{3}{4} * \frac{1}{5} = \frac{1}{4 * (4+1)}$
- ...

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η συνάρτηση πιθανότητας ακολουθεί ένα συγκεκριμένο μοτίβο, που μπορεί να μας δώσει ένα γενικό τύπο. Αυτός είναι:

$$P(X = i) = \frac{1}{i(i+1)}, \quad i \geq 1$$

(β') Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X > n) &= 1 - P(X \leq n) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \left(\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{n*(n+1)} \right) = \\ &= 1 - \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Θα βρούμε, τώρα, την πιθανότητα όταν $n \rightarrow \infty$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X > n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Συνεπώς, αφού η τυχαία μεταβλητή X αντιπροσωπεύει το πλήθος των σταδίων έως την επιλογή της μπλε μπάλας, καταλαβαίνουμε ότι η μπλε μπάλα θα επιλεγεί κάποια στιγμή στο μέλλον (μετά από πεπερασμένο αριθμό σταδίων), με πιθανότητα 1!