

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2017-2018
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 2

Άσκηση 1

Από τους ασθενείς που νοσηλεύονται σε μια κλινική, το 60% έχει καρδιακή ανεπάρκεια, το 50% έχει πνευμονική ανεπάρκεια και το 35% έχει και τα δύο. Βρείτε τις πιθανότητες:

- α) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
- β) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν δεν έχει πνευμονική ανεπάρκεια.
- γ) Ένας ασθενής να έχει καρδιακή ανεπάρκεια, αν είναι γνωστό ότι δεν έχει και τα δύο προβλήματα.

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$K = \{\text{ένας ασθενής έχει καρδιακή ανεπάρκεια}\}$$
$$\Pi = \{\text{ένας ασθενής έχει πνευμονική ανεπάρκεια}\}$$

Τότε ξέρω ότι

$$P(K) = \frac{60}{100} = 0.6, P(\Pi) = \frac{50}{100} = 0.5 \text{ και } P(K \cap \Pi) = \frac{35}{100} = 0.35$$

- α) Ψάχνω την πιθανότητα $P(K | \Pi)$. Άρα από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$P(K | \Pi) = \frac{P(K \cap \Pi)}{P(\Pi)} = \frac{0.35}{0.5} = 0.7$$

- β) Ψάχνω την πιθανότητα

$$P(K | \Pi^c) = \frac{P(K \cap \Pi^c)}{P(\Pi^c)}$$

Ξέρουμε ότι για δυο ενδεχόμενα K, Π ισχύει ότι $K \cap \Pi^c = K - \Pi$ και $P(K - \Pi) = P(K) - P(K \cap \Pi)$. Άρα έχουμε:

$$P(K | \Pi^c) = \frac{P(K) - P(K \cap \Pi)}{1 - P(\Pi)} = \frac{0.6 - 0.35}{1 - 0.5} = 0.5$$

- γ) Ψάχνω την πιθανότητα

$$P(K | (K \cap \Pi)^c) = \frac{P(K \cap (K \cap \Pi)^c)}{P((K \cap \Pi)^c)} = \frac{P(K) - P(K \cap \Pi)}{1 - P(K \cap \Pi)} = \frac{0.6 - 0.35}{1 - 0.35} \approx 0.38$$

Άσκηση 2

Έχουμε τρία ακατάστατα δωμάτια $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Ένα αντικείμενο βρίσκεται σε ένα από αυτά. Για κάθε $i = 1, 2, 3$, p_i είναι η πιθανότητα το αντικείμενο να είναι στο Δ_i και q_i είναι η πιθανότητα, αν το αντικείμενο βρίσκεται στο Δ_i και ψάξουμε εκεί, να το βρούμε. Ψάχνουμε και στα τρία δωμάτια. Ποια είναι η πιθανότητα να βρούμε το αντικείμενο;

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$\begin{aligned}\Delta_i &= \{\text{το αντικείμενο βρίσκεται στο } \Delta_i \text{ δωμάτιο}\} \\ E &= \{\text{το αντικείμενο βρέθηκε}\}\end{aligned}$$

για $i = 1, 2, 3$. Άρα ξέρω ότι

$$P(\Delta_i) = p_i \text{ και } P(E | \Delta_i) = q_i \text{ για } i = 1, 2, 3.$$

Ψάχνω την πιθανότητα $P(E)$. Εφαρμόζοντας τον τύπο ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned}P(E) &= P(E \cap \Delta_1) + P(E \cap \Delta_2) + P(E \cap \Delta_3) \\ &= P(\Delta_1) \cdot P(E | \Delta_1) + P(\Delta_2) \cdot P(E | \Delta_2) + P(\Delta_3) \cdot P(E | \Delta_3) \\ &= p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3\end{aligned}$$

Άσκηση 3

Τρεις εργάτες, οι Α, Β, Γ εργάζονται σε μια βιοτεχνία. Από ένα συγκεκριμένο είδος συσκευών ο Α κατασκευάζει το 50%, ο Β το 30%, ο Γ το 20%. Από αυτές τις συσκευές που κατασκευάζει ο Α, το 2% βγαίνουν ελαττωματικές. Τα αντίστοιχα ποσοστά για τους Β και Γ είναι 3% και 5%. Αγοράζουμε μια συσκευή και είναι ελαττωματική. Βρείτε την πιθανότητα να την έχει κατασκευάσει ο Α.

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$\begin{aligned}A &= \{\text{μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Α}\} \\ B &= \{\text{μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Β}\} \\ \Gamma &= \{\text{μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Γ}\} \\ E &= \{\text{μια συσκευή είναι ελαττωματική}\}\end{aligned}$$

Άρα ξέρουμε ότι

$$P(A) = 0.5, P(B) = 0.3, P(\Gamma) = 0.2, P(E | A) = 0.02, P(E | B) = 0.03 \text{ και } P(E | \Gamma) = 0.05$$

Ψάχνω την πιθανότητα $P(A | E)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes έχουμε:

$$\begin{aligned}P(A | E) &= \frac{P(E | A) \cdot P(A)}{P(E | A) \cdot P(A) + P(E | B) \cdot P(B) + P(E | \Gamma) \cdot P(\Gamma)} \\ &= \frac{0.02 \cdot 0.5}{0.02 \cdot 0.5 + 0.03 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.2} \approx 0.34\end{aligned}$$

Άσκηση 4

Ένα κουτί περιέχει 3 κάρτες: μια μπλε και από τις δύο πλευρές, μια κίτρινη και από τις δύο πλευρές και μια που είναι από τη μια πλευρά μπλε και από την άλλη πλευρά κίτρινη. Επιλέγουμε τυχαία μια κάρτα και βλέπουμε ότι η μια της πλευρά είναι κίτρινη. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι και η άλλη πλευρά κίτρινη;

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$M = \{\text{επιλέγουμε την κάρτα που είναι μπλε και από τις δυο πλευρές}\}$

$K = \{\text{επιλέγουμε την κάρτα που είναι κίτρινη και από τις δυο πλευρές}\}$

$H = \{\text{επιλέγουμε την κάρτα που είναι από τη μια πλευρά μπλε και από την άλλη πλευρά κίτρινη}\}$

$A = \{\text{η επιλεγμένη πλευρά είναι κίτρινη}\}$

Ψάχνω την πιθανότητα $P(K | A)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes έχουμε:

$$\begin{aligned} P(K | A) &= \frac{P(A | K) \cdot P(K)}{P(A | M) \cdot P(M) + P(A | K) \cdot P(K) + P(A | H) \cdot P(H)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Αν τα ενδεχόμενα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα, να εξετάσετε αν είναι επίσης ανεξάρτητα τα γεγονότα $A \cup B, \Gamma^c$.

Λύση

Πρέπει να δείξω ότι $P((A \cup B) \cap \Gamma^c) = P(A \cup B) \cdot P(\Gamma^c)$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap \Gamma^c) &= P((A \cup B) - \Gamma) \\ &= P(A \cup B) - P((A \cup B) \cap \Gamma) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(\Gamma) - P(B) \cdot P(\Gamma) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \\ &= (P(A) - P(A) \cdot P(\Gamma)) + (P(B) - P(B) \cdot P(\Gamma)) + (P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) - P(A) \cdot P(B)) \\ &= P(A) \cdot (1 - P(\Gamma)) + P(B) \cdot (1 - P(\Gamma)) - P(A) \cdot P(B) \cdot (1 - P(\Gamma)) \\ &= (1 - P(\Gamma)) \cdot (P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)) \\ &= P(\Gamma^c) \cdot (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= P(\Gamma^c) \cdot P(A \cup B) \end{aligned}$$

Άρα τα γεγονότα $A \cup B, \Gamma^c$ είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 6

Τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα. Το ίδιο ισχύει για τα ενδεχόμενα A, Γ . Τα B, Γ είναι ασυμβίβαστα. Αποδείξτε ότι τα ενδεχόμενα $A, B \cup \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

Λύση

Αφού τα B, Γ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε ότι $B \cap \Gamma = \emptyset$. Άρα ισχύει και ότι $(A \cap B) \cap (A \cap \Gamma) = \emptyset$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $P(A \cap (B \cup \Gamma)) = P(A) \cdot P(B \cup \Gamma)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup \Gamma)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap \Gamma) \\ &= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\Gamma) \\ &= P(A) \cdot (P(B) + P(\Gamma)) \\ &= P(A) \cdot P(B \cup \Gamma) \end{aligned}$$

Άρα τα $A, B \cup \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 7

Τα άτομα του πληθυσμού μιας χώρας έχουν ομάδα αίματος B με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Αν δυο άτομα είναι αδέρφια και το ένα έχει ομάδα αίματος B , η πιθανότητα να ισχύει το ίδιο και για το άλλο είναι $\frac{3}{4}$. Όταν κάποια άτομα δεν έχουν καμιά συγγένεια, τα ενδεχόμενα που αφορούν τις ομάδες αίματός τους είναι ανεξάρτητα. Θεωρούμε τα άτομα A_1, A_2, A_3, A_4 , όπου τα A_1, A_2 είναι αδέρφια, ενώ δεν υπάρχει καμιά άλλη συγγένεια ανάμεσα σε αυτά τα άτομα. Βρείτε την πιθανότητα ακριβώς 3 από αυτά τα άτομα να έχουν ομάδα αίματος B .

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

$$\begin{aligned} A_i &= \{\text{ο } A_i \text{ έχει ομάδα αίματος } B\}, \text{ για } i = 1, 2, 3, 4 \text{ και} \\ B &= \{\text{ακριβώς 3 άτομα έχουν ομάδα αίματος } B\} \end{aligned}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4^c) + P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3^c) \cdot P(A_4) \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2^c) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) + P(A_1^c \cap A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \\ &= \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{16} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \approx 0.07 \end{aligned}$$

αφού τα $A_1 \cap A_2, A_3, A_4$ είναι ανεξάρτητα και

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16},$$

$$P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1) \cdot P(A_2^c | A_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

$$P(A_1^c \cap A_2) = P(A_2) \cdot P(A_1^c | A_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$