

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2017-2018
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 1

Άσκηση 1

Αν A, B, C είναι τρία ενδεχόμενα, γράψτε τα σύνολα που περιγράφουν τα παρακάτω ενδεχόμενα:

- α) Δεν συμβαίνει κανένα από τα A, B, C .
- β) Συμβαίνει το πολύ ένα από τα A, B, C .
- γ) Συμβαίνει ακριβώς ένα από τα A, B, C .
- δ) Συμβαίνουν τουλάχιστον δύο από τα A, B, C .
- ε) Συμβαίνουν το πολύ δύο από τα A, B, C .

Λύση

- α) $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$
- β) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$, δηλαδή ή θα συμβεί μόνο το A , ή μόνο το B , ή μόνο το C , ή κανένα από τα A, B, C .
- γ) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
- δ) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- ε) Θέλουμε να συμβαίνουν το πολύ δύο από τα A, B, C , δηλαδή να μη συμβαίνουν και τα 3 ενδεχόμενα μαζί. Άρα το ενδεχόμενο αυτό είναι το σύνολο $(A \cap B \cap C)^c$.

Άσκηση 2

Έστω A και B τα ενδεχόμενα ένας εργαζόμενος στις 7 : 30 π.μ να βρίσκεται στη στάση για να μεταβεί στη δουλειά του και περιμένει να περάσει λεωφορείο ή ταξί, αντίστοιχα. Αν $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.30$, οι πιθανότητες των παραπάνω ενδεχομένων, να υπολογισθεί η πιθανότητα στις 7 : 30 π.μ να μην περάσει ούτε ταξί, ούτε λεωφορείο από τη στάση.

Λύση

Ζητείται να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $A^c \cap B^c$. Παρατηρούμε ότι: $A \cap B = \emptyset$ Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - (0.45 + 0.30) \\ &= 1 - 0.75 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Ρίχνουμε δύο φορές ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι.

- α) Περιγράψτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
- β) Ονομάζουμε A το γεγονός ότι η πρώτη ρίψη φέρνει αριθμό μικρότερο από 3. Περιγράψτε το γεγονός A και υπολογίστε την πιθανότητά του, $P(A)$.
- γ) Ονομάζουμε B το γεγονός ότι το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι ίσο με 4. Περιγράψτε το γεγονός B και υπολογίστε την πιθανότητά του, $P(B)$.
- δ) Ποιο είναι το ενδεχόμενο $A \cap B$;

Λύση

- α) Μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε απλό ενδεχόμενο χρησιμοποιώντας ένα διατεταγμένο ζεύγος (a, b) όπου a και b είναι οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν τα αποτελέσματα της 1ης και της 2ης ρίψης αντίστοιχα. Έτσι ο δειγματικός χώρος του πειράματος εκφράζεται ως

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}$$

ή πιο απλά και αναλυτικά

$$\Omega = \{(a, b) : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6\}$$

- β) Αντίστοιχα το γεγονός $A = \{ \text{Η 1η ρίψη φέρνει αριθμό μικρότερο από 3} \}$ περιγράφεται ως

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$$

ή

$$A = \{(a, b) : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 6\}$$

Αφού τα ζάρια είναι δίκαια, όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα άρα

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

- γ) Το γεγονός $B = \{ \text{Το άθροισμα των 2 ρίψεων είναι ίσο με 4} \}$ περιγράφεται ως

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

- δ) $A \cap B = \{(1, 3), (2, 2)\}$.

Άσκηση 4

Σε μια έρευνα συγκεντρώθηκαν στοιχεία για 1000 άτομα. Βρέθηκε ότι από αυτά:

- α) 832 ήταν άνδρες
- β) 521 ήταν παντρεμένοι
- γ) 350 ήταν παντρεμένοι άνδρες

Είναι δυνατόν αυτά τα στοιχεία να είναι σωστά;

Λύση

Αν $A = \{\text{άνδρας}\}$ και $\Pi = \{\text{παντρεμένος}\}$, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία έχουμε

$$P(A) = \frac{832}{1000}, P(\Pi) = \frac{521}{1000} \text{ και } P(A \cap \Pi) = \frac{350}{1000}.$$

Άρα έχουμε

$$P(A \cup \Pi) = P(A) + P(\Pi) - P(A \cap \Pi) = \frac{832}{1000} + \frac{521}{1000} - \frac{350}{1000} = \frac{1003}{1000} = 1.003 > 1,$$

το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως δεν είναι δυνατόν τα παραπάνω στοιχεία να είναι σωστά.

Άσκηση 5

Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 2 \cdot x$ και $P(A \cup B) = 4 \cdot x^2 + \frac{3}{4}$, να βρεθεί ο $x > 0$.

Λύση

Ξέρω ότι

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Επομένως,

$$4 \cdot x^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{2} + 2 \cdot x$$

$$16 \cdot x^2 + 3 \leq 2 + 8 \cdot x$$

$$16 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1 \leq 0$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 64 - 64 = 0, \text{ άρα } x_{1,2} = \frac{8}{2 \cdot 16} = \frac{1}{4} \text{ και } 16 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1 \geq 0.$$

Άρα αναγκαστικά $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1 = 0$ και $x = \frac{1}{4}$.

(Μάλιστα παρατηρώ ότι τα A και B είναι ασυμβίβαστα αφού $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.)

Άσκηση 6

Ένα κουτί περιέχει 10 άσπρους και 5 μαύρους βόλους. Επιλέγουμε τυχαία δύο βόλους χωρίς επανάθεση.

- α) Ποια είναι η πιθανότητα και οι δύο βόλοι να είναι άσπροι;
- β) Ποια είναι η πιθανότητα ο πρώτος βόλος να είναι άσπρος και ο δεύτερος μαύρος;

Λύση

Το κουτί περιέχει 10 άσπρους και 5 μαύρους βόλους (συνολικά 15 βόλους).

- α) Έστω A_1 το ενδεχόμενο ο πρώτος βόλος να είναι άσπρος και A_2 το ενδεχόμενο ο δεύτερος βόλος να είναι άσπρος. Τότε θα ισχύει ότι:

$$P(A_1) = \frac{10}{15}$$

Δεδομένου ότι ο πρώτος βόλος είναι άσπρος, τώρα θα υπάρχουν 14 βόλοι στο κουτί, από τους οποίους οι 9 θα είναι άσπροι. Επομένως, η πιθανότητα ο δεύτερος βόλος που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρος, δεδομένου ότι ο πρώτος βόλος είναι άσπρος, είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2 | A_1) = \frac{9}{14}.$$

Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό νόμο, η πιθανότητα ότι και οι δύο βόλοι που επιλέγονται τυχαία είναι άσπροι θα είναι ίση με:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{90}{210} = \frac{9}{21}$$

- β) Έστω M_2 το ενδεχόμενο ο δεύτερος βόλος να είναι μαύρος. Τότε θα ισχύει ότι:

$$P(A_1) = \frac{10}{15}$$

όπως είδαμε παραπάνω και δεδομένου ότι ο πρώτος βόλος είναι άσπρος, τώρα θα υπάρχουν 14 βόλοι στο κουτί, από τους οποίους οι 5 θα είναι μαύροι. Επομένως, η πιθανότητα ο δεύτερος βόλος που επιλέγεται τυχαία να είναι μαύρος, δεδομένου ότι ο πρώτος βόλος είναι άσπρος, είναι η ακόλουθη:

$$P(M_2 | A_1) = \frac{5}{14}$$

Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό νόμο, η πιθανότητα ότι ο πρώτος βόλος είναι άσπρος και ο δεύτερος μαύρος θα είναι ίση με:

$$P(A_1 \cap M_2) = P(A_1) \cdot P(M_2 | A_1) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{50}{210} = \frac{5}{21}$$

Άσκηση 7

Ρίχνουμε 2 ζάρια. Βρείτε την πιθανότητα τουλάχιστον ένα να έφερε 6, αν είναι γνωστό ότι τα ζάρια έφεραν διαφορετικούς αριθμούς.

Λύση

Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος και ορίσουμε τα ενδεχόμενα

$$A = \{\text{τουλάχιστον ένα ζάρι έφερε 6}\} \text{ και } B = \{\text{τα ζάρια έφεραν διαφορετικούς αριθμούς}\},$$

τότε ψάχνουμε την πιθανότητα

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},$$

αφού

$$A \cap B = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

και

$$B = \Omega \setminus \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$