

12-1-2018 ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

(α) Η αναλυτική έκφραση για την α.σ.κ. της τ.μ. X προκύπτει εύκολα ότι είναι:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -15 \\ 0.05x + 0.75 & -15 \leq x < -10 \\ 0.25 & -10 \leq x < -5 \\ 0.05x + 0.5 & -5 \leq x < 5 \\ 0.75 & 5 \leq x < 10 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

$$(β) P(0 < X < 10) = F_X(10^-) - F_X(0) = 0.75 - 0.5 = 0.25$$

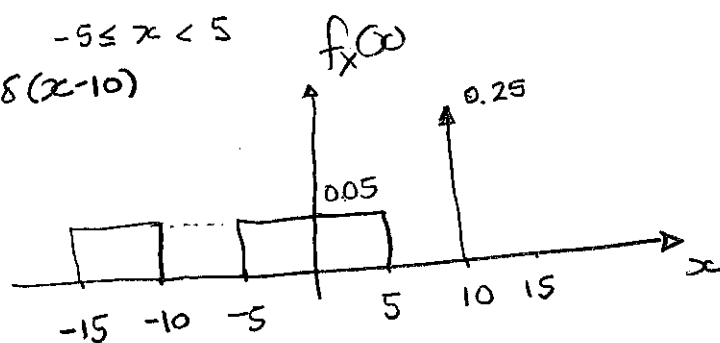
$$P(0 < X \leq 10) = F_X(10) - F_X(0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$(γ) P(X > -5) = 1 - P(X \leq -5) = 1 - F_X(-5) = 1 - 0.25 = 0.75$$

$$(δ) P(|X| \leq 10) = P(-10 \leq X \leq 10) = F_X(10) - F_X(-10^-) = 1 - 0.25 = 0.75$$

(ε) Πρόκειται για μία μικτή τ.μ. Παραγωγίζοντας την $F_X(x)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.05 & -15 \leq x < -10 \\ 0.05 & -5 \leq x < 5 \\ 0.25 \delta(x-10) \end{cases}$$



$$E[X] = \int_{-15}^{-10} 0.05x dx + \int_{-5}^5 0.05x dx + 0.25 \times 10$$

$$= 0.025x^2 \Big|_{-15}^{-10} + 0.025x^2 \Big|_{-5}^5 + 2.5 = -0.625$$

$$E[X^2] = \int_{-15}^{-10} 0.05x^2 dx + \int_{-5}^5 0.05x^2 dx + 10^2 \times 0.25 = 68.75$$

$$\therefore \text{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 68.125 \quad \square$$

Ορίστε τα γεγονότα.

$A = \{ \text{το εξάρτημα παράγεται από την μονάδα παραγωγής A} \}$
 $B = \{ \text{το εξάρτημα παράγεται από την μονάδα παραγωγής B} \}$

Έστω T η διάρκεια ζωής ενός εξαρτήματος. Σύμφωνα με την εκτίμηση, $P(T > 200 | A) = 1$ και η δεδομένη κατανομή της τ.μ. T δεδομένου του B είναι εκθετική με παράμετρο $1/300$:

$$f_{T/B}(t) = \frac{1}{300} e^{-t/300}; t \geq 0$$

$$F_{T/B}(t) = 1 - e^{-t/300}$$

Επίσης μας δίδεται ότι: $P(T > 200) = 0.9$

Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε ότι:

$$P(T > 200) = P(A) \cdot P(T > 200 | A) + P(B) \cdot P(T > 200 | B)$$

$$0.9 = P(A) \cdot 1 + (1 - P(A)) \cdot (1 - F_{T/B}(200))$$

$$0.9 = P(A) + (1 - P(A)) \cdot e^{-2/3}$$

$$P(A) = \frac{0.9 - e^{-2/3}}{1 - e^{-2/3}} = 0.7945 \quad \square$$

$R_1 \sim N(600, 1600)$, $R_2 \sim N(700, 2500)$, $R_3 \sim N(800, 3600)$

(α) Από τη θεωρία, $R = R_1 + R_2 + R_3 \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$
 καθώς οι R_1, R_2, R_3 είναι ανεξάρτητες στατιστικές τ.μ.

$$R \sim N(2100, 7700)$$

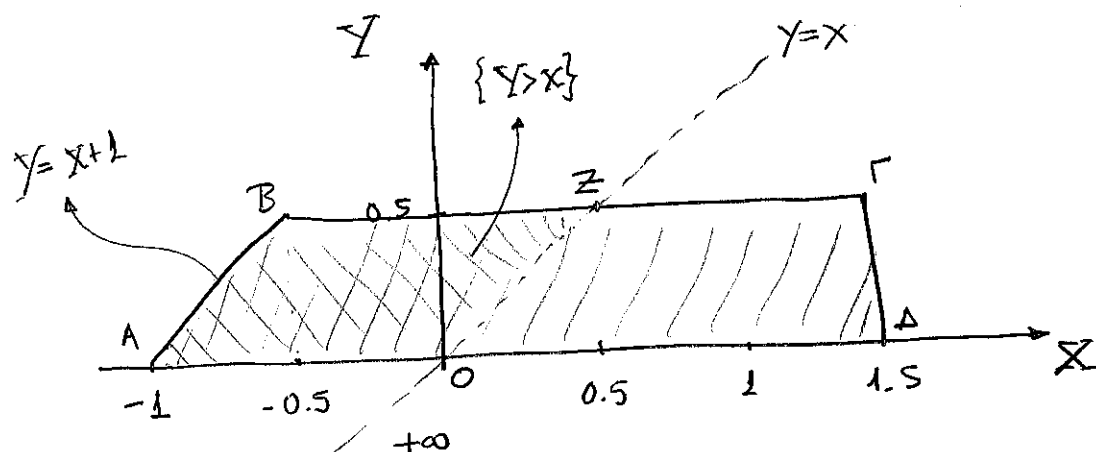
$$(β) P(1950 \leq R \leq 2200) = P\left(\frac{1950 - 2100}{\sqrt{7700}} \leq \frac{R - 2100}{\sqrt{7700}} \leq \frac{2200 - 2100}{\sqrt{7700}}\right)$$

$$= P(-1.71 \leq R' \leq 1.14) = \Phi(1.14) - \Phi(-1.71)$$

$$= \Phi(1.14) + \Phi(1.71) - 1 \quad \square$$

ΘΕΜΑ 4:

Για $c=1/2$, η από κοινού κατανομή των X, Y είναι: (3)



α) Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$. Από το σχήμα,

$$E_{AB\Gamma\Delta} \cdot \alpha = 1 \Rightarrow \frac{(B\Gamma + A\Delta) \cdot \Gamma\Delta}{2} \cdot \alpha = 1 \Rightarrow \frac{(2 + 2.5) \cdot 0.5}{2} \cdot \alpha = 1$$

$$\therefore \alpha = \frac{8}{9} = 0.8889$$

$$\therefore f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.8889 & (x,y) \in \text{χωρίο } AB\Gamma\Delta \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(β) Για $x < -1$ και $x > 1.5$, $f_X(x) = 0$

$$\cdot \text{ Για } -1 \leq x \leq -0.5, f_X(x) = \int_0^{x+1} \frac{8}{9} dy = \frac{8}{9} y \Big|_0^{x+1} = \frac{8}{9} (x+1)$$

$$\cdot \text{ Για } -0.5 \leq x \leq 1.5, f_X(x) = \int_0^{0.5} \frac{8}{9} dy = \frac{4}{9}$$

$$\therefore f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{9} (x+1) & -1 \leq x \leq -0.5 \\ \frac{4}{9} & -0.5 \leq x \leq 1.5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

· Για $y < 0$ και $y > 0.5$, $f_Y(y) = 0$

$$\cdot \text{ Για } 0 \leq y \leq 0.5, f_Y(y) = \int_{y-1}^{1.5} \frac{8}{9} dx = \frac{8}{9} x \Big|_{y-1}^{1.5} = \frac{20}{9} - \frac{8}{9} y$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{20-8y}{9} & 0 \leq y \leq 0.5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$(γ) \quad f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad \text{όταν } f_X(x) > 0.$$

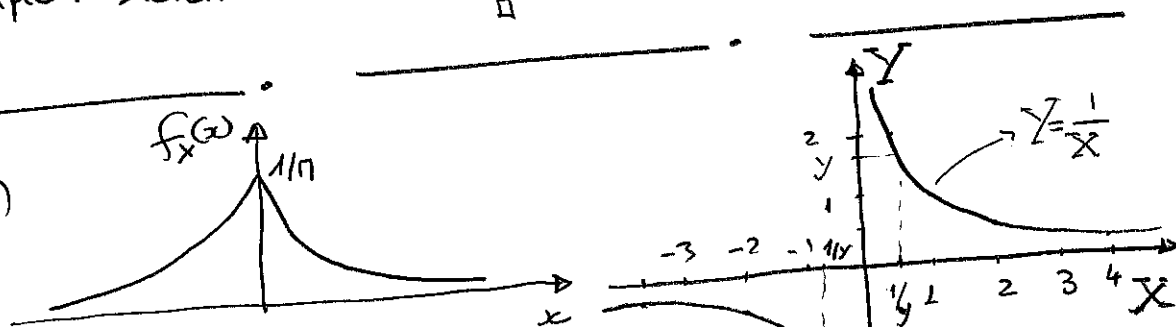
(4)

$$\therefore f_{Y/X}(y/x) = \begin{cases} \text{δεν ορίζεται} & \text{για } x \notin [-1, 1.5] \\ \frac{8/9}{\frac{8}{9}(x+1)} = \frac{1}{x+1} & -1 \leq x \leq -0.5, 0 \leq y \leq x+1 \\ \frac{8/9}{4/9} = 2 & -0.5 \leq x \leq 1.5, 0 \leq y \leq 0.5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$(δ) \quad P(Y \geq X) = E_{ABZO} \cdot \alpha = 1 \times 0.5 \times \frac{8}{9} = \frac{4}{9} = \underline{0.4444}$$

(ε) Για να είναι οι από κοινού ομοιόμορφα κατανοημένες τ.μ. X, Y ανεξάρτητες θα πρέπει το c να επηρεάζει έτσι ώστε το χωρίο $ABΓΔ$ του πεδίου τιμών των X, Y να είναι ορθογώνιο παράλληλογράμμο. Συνεπώς $c = 0$. $\square$

ΘΕΜΑ 5^ο (α)



$$\begin{aligned} (ρ) \quad y \geq 0 : F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \leq 0) + P(X \geq \frac{1}{y}) \\ &= \frac{1}{2} + 1 - F_X(1/y) = \frac{3}{2} - F_X(1/y) \\ y < 0 : F_Y(y) &= P(\frac{1}{y} \leq X \leq 0) = F_X(0) - F_X(1/y) = \frac{1}{2} - F_X(1/y) \\ \therefore F_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{2} - F_X(1/y) & y < 0 \\ \frac{3}{2} - F_X(1/y) & y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(8) Παραγωγίζοντας ως προς y την α.β.κ. $F_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{y^2} f_X\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2} \frac{1}{\pi(1 + \frac{1}{y^2})} = \frac{1}{\pi(1 + y^2)}$$

$\Rightarrow Y: \text{Cauchy!}$ $\square$