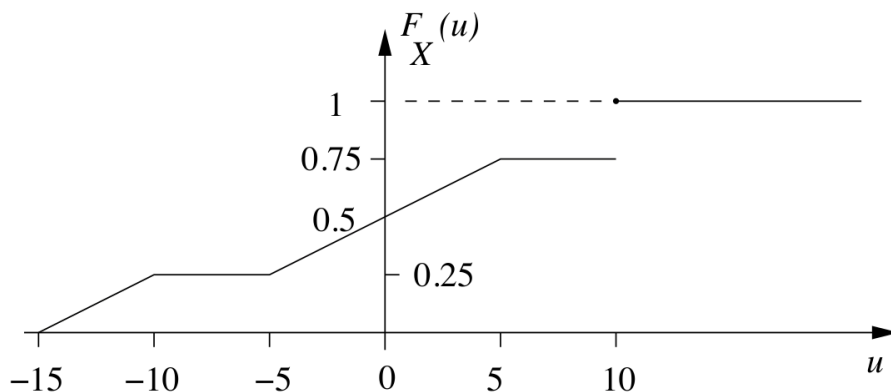


Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
12 Ιανουαρίου 2018 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) $F_X(x)$ που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της α.σ.κ. της τ.μ. X του θέματος 1.

- (α) Δώστε την αναλυτική έκφραση για την α.σ.κ., $F_X(x)$, της τ.μ. X .
- (β) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(0 < X < 10)$ και $P(0 < X \leq 10)$.
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > -5)$.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X| \leq 10)$.
- (ε) Υπολογίστε την αναλυτική έκφραση και δώστε την γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ. X .
- (στ) Υπολογίστε την μέση τιμή, $E[X]$, και την διασπορά, $var(X)$, της τ.μ. X .

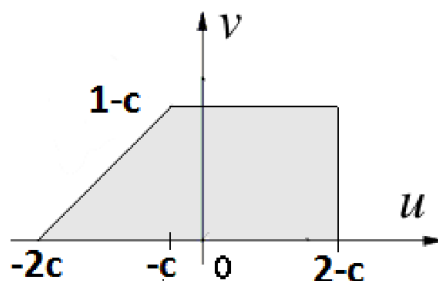
Θέμα 2 - 20 μονάδες. Αν ένα εξάρτημα παράγεται από την μονάδα παραγωγής Α, η διάρκεια ζωής του ξεπερνά τις 200 ώρες, ενώ αν παράγεται από την μονάδα παραγωγής Β, η διάρκεια ζωής του ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 300 ώρες.

Στο σύνολο των χρησιμοποιούμενων εξαρτημάτων παρατηρήθηκε ότι το ποσοστό αυτών που η διάρκεια ζωής τους υπερβαίνει τις 200 ώρες είναι 90%. Να βρεθεί το ποσοστό των εξαρτημάτων που προέρχονται από την μονάδα παραγωγής Α.

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Οι ηλεκτρικές αντιστάσεις R_1, R_2, R_3 μοντελοποιούνται ως ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες ακολουθούν Γκαουσιανή κατανομή με μέσες τιμές $\mu_1 = 600$, $\mu_2 = 700$ και $\mu_3 = 800$ και διασπορές $\sigma_1^2 = 1600$, $\sigma_2^2 = 2500$ και $\sigma_3^2 = 3600$, αντίστοιχα.

- (α) Ποια είναι η κατανομή της ολικής αντίστασης $R = R_1 + R_2 + R_3$;
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(1950 \leq R \leq 2200)$ εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

Θέμα 4 - 20 μονάδες. Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) X και Y έχουν από κοινού ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και πεδίο τιμών το σκιασμένο χωρίο του Σχήματος 2, όπου c μία σταθερά.



Σχήμα 2: Η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X και Y είναι σταθερή στο σκιασμένο χωρίο.

- (α) Έστω $c = 1/2$. Υπολογίστε την από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X και Y .
- (β) Έστω $c = 1/2$. Βρείτε τις περιθωριακές σ.π.π. $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των τ.μ. X και Y , αντίστοιχα.
- (γ) Έστω $c = 1/2$. Βρείτε την δεσμευμένη σ.π.π. $f_{Y|X}(y|x)$.
- (δ) Έστω $c = 1/2$. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y \geq X)$.
- (ε) Για ποια τιμή της σταθεράς c είναι οι τ.μ. X Y ανεξάρτητες;

Θέμα 5 - 20 μονάδες. Μία τυπική τυχαία μεταβλητή Cauchy έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad -\infty < x < +\infty$$

Θα δείξουμε ότι αν η X είναι μία τυπική τ.μ. Cauchy, τότε το ίδιο ισχύει και για την $1/X$. Ορίζουμε λοιπόν την τ.μ.

$$Y = g(X) = \frac{1}{X}$$

- (α) Δώστε τις γραφικές παραστάσεις της σ.π.π. $f_X(x)$ καθώς και του μετασχηματισμού $Y = 1/X$.
- (β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$ της τ.μ. Y ως συνάρτηση της α.σ.κ. της τ.μ. X . Βοήθεια: Υπολογίστε την $F_Y(y)$ πρώτα για $y \geq 0$ και μετά για $y < 0$.
- (γ) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_y(y)$ και δείξτε ότι έχει την ίδια ακριβώς έκφραση με την σ.π.π. της X .