

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2017-2018
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Έκτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α) Για να αποτελεί η $f(x, y)$ μια από κοινού σ.π μιας δισδιάστατης τ.μ θα πρέπει να ισχύει ότι $f(x, y) \geq 0, \forall x \in R, y \in R$ και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = 1$$

Από την πρώτη συνθήκη πρέπει να ισχύει ότι: $c \geq 0$. Αντίστοιχα από την δεύτερη συνθήκη πρέπει να ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{10} \int_0^{10} f(x, y) dy dx = c \int_0^{10} \int_0^{10} (x^2 - 2xy - y^2) dx dy = \int_0^{10} (x^2[y]_0^{10} - x[y^2]_0^{10} + \frac{1}{3}[y^3]_0^{10}) dx = \\ &= c \int_0^{10} (10x^2 + 100x - 1000/3) dx = c \left(\frac{10}{3}[x^3]_0^{10} - \frac{100}{2}[x^2]_0^{10} + \frac{1000}{3}[x]_0^{10} \right) = \frac{5000c}{3} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$c = \frac{3}{5} \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-4}$$

(β) Για $0 \leq x < 10$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{10} 6 \cdot 10^{-4} (x-y)^2 dy = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} (x-y)^2 dy = 6 \cdot 10^{-4} [x^2 - 2xy + y^2]_0^{10} = \\ &= 6 \cdot 10^{-4} [yx^2 - 2x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}]_0^{10} = 6 \cdot 10^{-4} [10x^2 - 100x + \frac{1000}{3}] = 10^{-4} [60x^2 - 600x + \frac{6000}{3}] = 2 \cdot 10^{-3} [3x^2 - 30x + 100] \end{aligned}$$

Άρα τελικά έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-3} (3x^2 - 30x + 100) & 0 \leq x < 10 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Όμοια, για $0 \leq y < 10$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{10} 6 \cdot 10^{-4} (x-y)^2 dx = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} (x-y)^2 dx = 6 \cdot 10^{-4} [\frac{x^3}{3} - 2y \frac{x^2}{2} + xy^2]_0^{10} = \\ &= 2 \cdot 10^{-3} [3y^2 - 30y + 100] \end{aligned}$$

Άρα τελικά έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-3}(3y^2 - 30y + 100) & 0 \leq y < 10 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(γ) Για τον υπολογισμό της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής ορίζουμε:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{(x, y) : x < 0 \text{ ή } y < 0\} \\ \Pi_2 &= \{(x, y) : 0 \leq x < 10 \text{ και } 0 \leq y < 10\} \\ \Pi_3 &= \{(x, y) : 0 \leq x < 10 \text{ και } y \geq 10\} \\ \Pi_4 &= \{(x, y) : x \geq 10 \text{ και } 0 \leq y < 10\} \\ \Pi_5 &= \{(x, y) : x \geq 10 \text{ και } y \geq 10\} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds$$

- Αν $(x, y) \in \Pi_1$ τότε $f(s, t) = 0 \quad \forall \quad s \leq x, t \leq y$ άρα και $F(x, y) = 0$
- Αν $(x, y) \in \Pi_2$ τότε:

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(s, t) dt ds = \int_0^x \int_0^y 6 \cdot 10^{-4}(s - t)^2 dt ds = 10^{-4}xy(2x^2 + 2y^2 - 3xy)$$

- Αν $(x, y) \in \Pi_3$ τότε:

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^{10} f(s, t) dt ds = \int_0^x \int_0^{10} 6 \cdot 10^{-4}(s - t)^2 dt ds = 2 \cdot 10^{-3}(x^2 - 15x + 100)$$

- Αν $(x, y) \in \Pi_4$ τότε:

$$F(x, y) = \int_0^{10} \int_0^y f(s, t) dt ds = \int_0^{10} \int_0^y 6 \cdot 10^{-4}(s - t)^2 dt ds = 2 \cdot 10^{-3}(y^2 - 15y + 100)$$

- Αν $(x, y) \in \Pi_5$ τότε:

$$F(x, y) = \int_0^{10} \int_0^{10} f(s, t) dt ds = \int_0^{10} \int_0^{10} 6 \cdot 10^{-4}(s - t)^2 dt ds = 1$$

Άρα η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \quad \text{ή} \quad y < 0 \\ 10^{-4}xy(2x^2 + 2y^2 - 3xy) & 0 \leq x < 10 \quad \text{και} \quad 0 \leq y < 10 \\ 2 \cdot 10^{-3}(x^2 - 15x + 100) & 0 \leq x < 10 \quad \text{και} \quad y \geq 10 \\ 2 \cdot 10^{-3}(y^2 - 15y + 100) & x \geq 10 \quad \text{και} \quad 0 \leq y < 10 \\ 1 & x \geq 10 \quad \text{και} \quad y \geq 10 \end{cases}$$

(δ) Για τον υπολογισμό της πιθανότητας έχουμε:

$P(X \leq 2, Y \leq 2) = F(2, 2)$ και αντικαθιστώντας στην αθροιστική συνάρτηση κατανομής προκύπτει ότι: $F(2, 2) = \frac{1}{625}$

(ε) Για τον υπολογισμό της πιθανότητας έχουμε:

$$P(X > 5 \quad \text{ή} \quad Y > 5) = 1 - P(X \leq 5, Y \leq 5) = 1 - F(5, 5) = \frac{15}{16}$$

Άσκηση 2.

(α) Για να αποτελέσει η $f(x, y)$ από κοινού σ.π μιας δισδιάστατης τ.μ πρέπει να ισχύει ότι:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = \int_0^2 \int_0^{2-x} \frac{c}{2} x [y]_0^{2-x} = \frac{c}{2} \int_0^2 x(2-x)^2 dx = \frac{c}{2} \int_0^2 (4x^2 - 4x + x^3) dx =$$

$$\frac{c}{2} [2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4]_0^2 = \frac{2}{3}c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

(β) Για την X έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{2-x} \frac{3}{2} x y dy = \frac{3}{2} x [y]_0^{2-x} = 3x - 3x^2 + \frac{3}{4}x^3, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Η μέση τιμή της X υπολογίζεται ως:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^2 3x^2 - 3x^3 + \frac{3}{4}x^4 dx = \frac{4}{5}$$

Η διασπορά της X υπολογίζεται ως: $var(x) = E[x^2] - (E[x])^2$. Η $E[x^2]$ υπολογίζεται ως:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^2 3x^3 - 3x^4 + \frac{3}{4}x^5 dx = \frac{4}{5}$$

Άρα τελικά έχουμε ότι:

$$var(x) = E[x^2] - (E[x])^2 = \frac{4}{25}$$

Όμοια για την Y έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{2-y} \frac{3}{2} xy dy = \frac{3}{2} y [x]_0^{2-y} = 3y - 3y^2 + \frac{3}{4} y^3, \quad 0 \leq y \leq 2$$

Η μέση τιμή της Y υπολογίζεται ως:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy = \int_0^2 3y^2 - 3y^3 + \frac{3}{4} y^4 dy = \frac{4}{5}$$

Η διασπορά της Y υπολογίζεται ως: $var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2$. Η $E[Y^2]$ υπολογίζεται ως:

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y) dy = \int_0^2 3y^3 - 3y^4 + \frac{3}{4} y^5 dy = \frac{4}{5}$$

Άρα τελικά έχουμε ότι:

$$var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{4}{25}$$

(γ)

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dy dx = \int_0^2 \int_0^{2-x} \frac{3}{2} x^2 y^2 dy dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 [y^3]_0^{2-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 (e - x^3) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 8x^2 - 12x^3 + 6x^4 - x^5 dx = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{8}{15} - \left(\frac{4}{25}\right)^2 = -\frac{8}{75}$$

$$cov(Y, Z) = cov(Y, 2-X-Y) = cov(Y, -X) + cov(Y, -Y) = -cov(X, Y) - var(Y) = \frac{8}{75} - \frac{4}{25} = -\frac{4}{75}$$

$$cov(X, Z) = cov(X, 2-X-Y) = cov(X, -X) + cov(X, -Y) = -cov(X, Y) - var(X) = \frac{8}{75} - \frac{4}{25} = -\frac{4}{75}$$

Άσκηση 3.

Αφού γνωρίζουμε οι X και Y είναι από κοινού Γκαουσιανές, τότε και η $W = X + Y$ θα είναι και αυτή Γκαουσιανή, με:

$$E[W] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 0$$

και

$$var(W) = E[W^2] - (E[W])^2 = E[(X+Y)^2] - 0 = E[X^2 + Y^2 + 2XY] = E[X^2] + E[Y^2] + E[2XY] = 1 + 2 \cdot 0.5 + 1 = 3$$

Άρα:

$$f(w) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-w^2/6}$$

Δεδομένου ότι $Z=|W|$, γνωρίζουμε ότι η Z παίρνει μη αρνητικές τιμές. Άρα για $z > 0$:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(|W| \leq z) = P(-z \leq W \leq z) = \\ &F_W(z) - F_W(-z) = F_W(z) - (1 - F_W(z)) = 2F_W(z) - 1 \end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = 2f_W(z), \text{ για } z > 0 \text{ και } f_Z(z) = 0, z < 0 :$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{12}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{z^2}{6}} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

Άσκηση 4.

(α) Η περιθωριακή σ.π.π της $f_{X,Y}$ για την X γίνεται:

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^1 12xy(1-x) dy = 12x(1-x) \int_0^1 y dy = 12x(1-x) \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 6x(1-x)$$

Η περιθωριακή σ.π.π της $f_{X,Y}$ για την Y γίνεται:

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^1 12xy(1-x) dx = 12y \int_0^1 x(1-x) dx = 12y \int_0^1 x - x^2 dx = 12y \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2y$$

(β) Για να είναι οι X, Y ανεξάρτητες, θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \forall x, y \in (0,1)$$

Έχουμε ότι:

$$f_X(x)f_Y(y) = 6x(1-x) \cdot 2y = 12xy(1-x) = f_{X,Y}, \forall x, y \in (0,1)$$

(γ) (i) Η μέση τιμή της X είναι:

$$E[X] = \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x 6x(1-x) dx = 6 \int_0^1 x^2(1-x) dx = 6 \int_0^1 x^2 - x^3 dx = 6 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Η μέση τιμή της Y είναι:

$$E[Y] = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \int_0^1 y 2y dy = \frac{2}{3} [y^3]_0^1 = \frac{2}{3}$$

(ii) Η διασπορά της X είναι $var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

Υπολογίζουμε τη ροπή δεύτερης τάξης $E[X^2]$ ως εξής:

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 6x(1-x) dx = 6 \int_0^1 x^3(1-x) dx = 6 \int_0^1 x^3 - x^4 dx = 6 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3}{10}$$

Επομένως, έχουμε: $var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{20}$

Αντίστοιχα, η διασπορά της Y γίνεται:

$$var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \int_0^1 y^2 \cdot f_Y(y) dy - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \int_0^1 y^2 \cdot 2y dy - \frac{4}{9} = \int_0^1 2y^3 dy - \frac{4}{9} = 2 \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

(δ) Έχουμε είδη αποδείξει ότι οι μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες άρα ισχύει ότι $cov(X, Y) = 0$

Άσκηση 5.

Αφού οι X και Y είναι ανεξάρτητες, η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας τους θα είναι:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}} & x > 0 \text{ και } y > 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Η πιθανότητα που ζητείται είναι η $P(X < Y)$ άρα:

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \int_0^{+\infty} \int_0^y \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}} dx dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}} [-e^{-\frac{x}{3}}]_0^y dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}} (1 - e^{-\frac{y}{3}}) dy = \\ &= [-e^{-\frac{y}{4}}]_0^{+\infty} + \frac{1}{4} [-e^{-\frac{y}{4}}]_0^{+\infty} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

(β) Η πιθανότητα που ζητείται είναι η $P(X + 1 < Y)$ άρα:

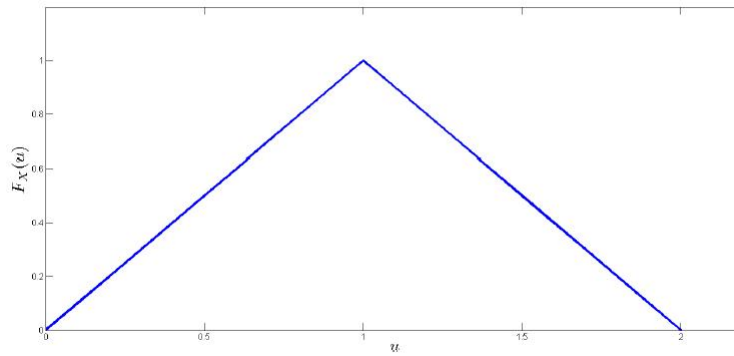
$$\begin{aligned} P(X + 1 < Y) &= \int_0^{+\infty} \int_{x+1}^{+\infty} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}} dx dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} [-e^{-\frac{y}{4}}]_{x+1}^{+\infty} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} e^{-\frac{-(x+1)}{4}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} e^{\frac{7x+3}{12}} dx = \frac{1}{3} \left(\frac{-12}{7} \right) [e^{\frac{-(7x+3)}{12}}]_0^{+\infty} = \frac{4}{7} e^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

(α) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Για να είναι έγκυρη η συνάρτηση θα πρέπει να ικανοποιούνται οι δύο παρακάτω ιδιότητες: $f_X(u) \geq 0$ $\forall u \in [0, 2]$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du = \text{χώρος του τριγώνου} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Σχήμα 1: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$

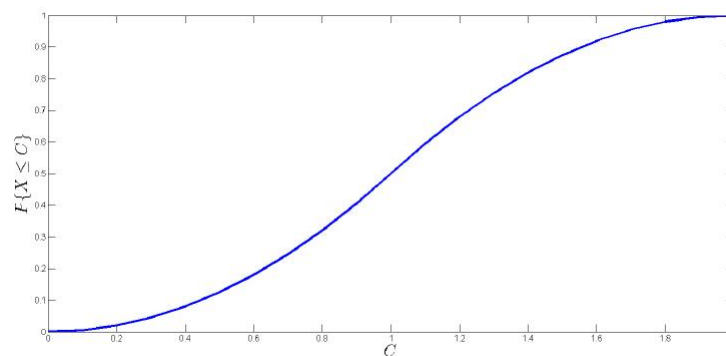
(β) Γνωρίζοντας ότι η χωρητικότητα ισούται με 1 και ότι η τιμή της X είναι 1.105, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το βενζινάδικο δεν μπορεί να ικανοποιήσει τη ζήτηση.

(γ) Η αναπαράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

$$P\{\text{ικανοποιείται η ζήτηση}\} = P\{X \leq C\} = \begin{cases} \int_0^C u du, \text{ αν } 0 \leq C \leq 1 \\ \int_1^C u du + \int_1^C (2-u) du, \text{ αν } 1 \leq C \leq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{C^2}{2}, \text{ αν } 0 \leq C \leq 1 \\ 2C - \frac{C^2}{2} - 1, \text{ αν } 1 \leq C \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{Αν } C = 1 \Rightarrow P\{\text{ικανοποιείται η ζήτηση}\} = \frac{1}{2}$$

Σχήμα 2: Πιθανότητα ζήτησης ως συνάρτηση του C

(δ)

$$P\{X > C\} \leq 10^{-1} \Leftrightarrow 1 - P\{X \leq C\} \leq 10^{-1}$$

$$P\{X \leq C\} \geq 0.9$$

$$2C - \frac{C^2}{2} - 1 \geq 0.9$$

$$\Rightarrow C = 1.5528 \text{ γαλόνια}$$

(ε) Έστω Z τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το εβδομαδιαίο κέρδος σε ευρώ. Τότε:

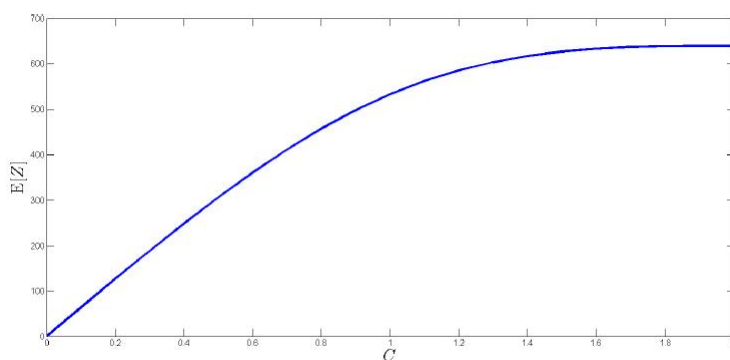
$$Z = g(X) = \begin{cases} 640X, & \text{αν } X < C \\ 640C, & \text{αν } X \geq C \end{cases}$$

Αν $0 \leq C \leq 1$:

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^C 2g(u)f_X(u)du \\ &= \int_0^C u \cdot 640u du + \int_C^1 640C \cdot u du + \int_1^2 640C \cdot (2-u)du \\ &= 640C - \frac{320}{3}C^3 \end{aligned}$$

Αν $1 \leq C \leq 2$:

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^1 2g(u)f_X(u)du \\ &= \int_0^1 u \cdot 640u du + \int_1^C 640u \cdot (2-u)du + \int_C^2 640C \cdot (2-u)du \\ &= \frac{320}{3}C^3 - 640C^2 + 1280C - \frac{640}{3} \end{aligned}$$



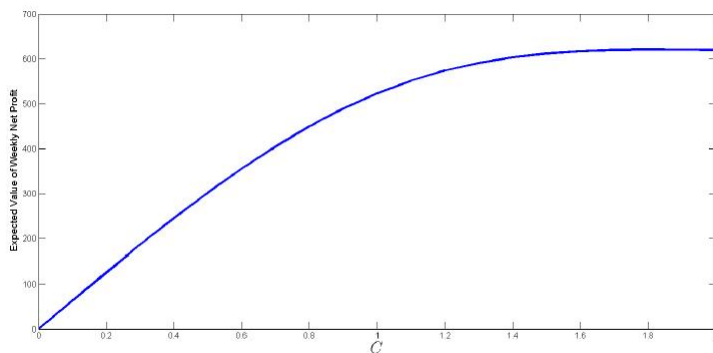
Σχήμα 3: Τιμή του εβδομαδιαίου κέρδους, ως συνάρτηση του C

(στ) Η αναπαράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

$$\begin{aligned} \text{Κέρδος} &= E[Z - 10C] \\ &= E[Z] - 10C \\ &= \begin{cases} 630C - \frac{320}{3}C^3, & \text{αν } 0 \leq C \leq 1 \\ -\frac{640}{3} + 1270C - 640C^2 + \frac{320}{3}C^3, & \text{αν } 1 \leq C \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Από το γράφημα, είναι ξεκάθαρο ότι η τιμή της C που μεγιστοποιεί το κέρδος είναι μεταξύ του 1 και του 2. Μηδενίζουμε την παράγωγο για να βρούμε την τιμή της C .

$$\frac{d}{dC} \left\{ -\frac{640}{3} + 1270C - 640C^2 + \frac{320}{3}C^3 \right\} = 1270 - 1280C + 320C^2 = 0 \Rightarrow C = 1.8232$$

Σχήμα 4: Τιμή του εβδομαδιαίου κέρδους, ως συνάρτηση του C **Άσκηση 7.**

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X > 11.5) = P(Z > \frac{11.5 - 8}{1.5}) = P(Z > 2.33) = 1 - 0.9901 = 0.0099$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

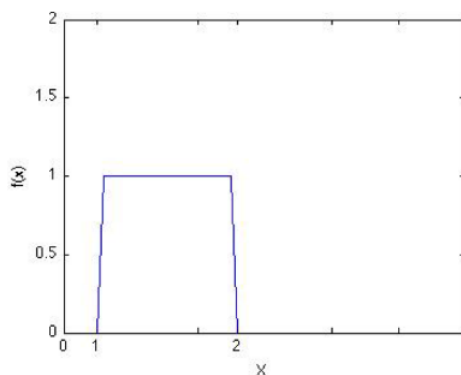
$$P(X < 8.7) = P(Z < \frac{8.7 - 8}{1.5}) = P(Z < 0.47) = 0.6808$$

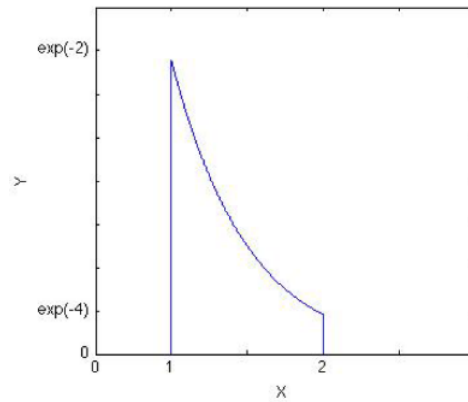
(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(6.2 < X < 7) = P(\frac{6.2 - 8}{1.5} < Z < \frac{7 - 8}{1.5}) = P(-1.2 < Z < -0.67) = 0.1363$$

Άσκηση 8.

(α) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X , καθώς και ο μετασχηματισμός $Y = g(X)$, φαίνονται στις επόμενες γραφικές παραστάσεις.

Σχήμα 5: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$

Σχήμα 6: Μετασχηματισμός $Y = g(X)$

(β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι η τ.μ X παίρνει τιμές στο διάστημα $[e^{-4}, e^{-2}]$. Άρα:

- Για $y < e^{-4}$, έχουμε ότι $F_Y(y) = 0$
- Για $e^{-4} \leq y < e^{-2}$, έχουμε ότι $F_Y(y) = 1$
- Για $e^{-2} \leq y$, έχουμε ότι:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(e^{-2X} < y) = P(-2X < \ln y) = P(X > -\frac{1}{2}\ln y) = \int_{-\frac{1}{2}\ln y}^{+\infty} 1dx = 2 + \frac{1}{2}\ln y$$

Οπότε έχουμε:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < e^{-4} \\ 2 + \frac{1}{2}\ln y & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 1 & e^{-2} \leq y \end{cases}$$

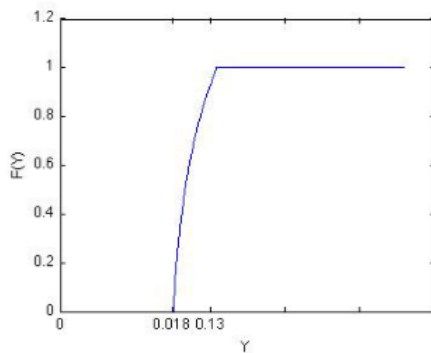
(γ) Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 7.

Έχουμε ότι:

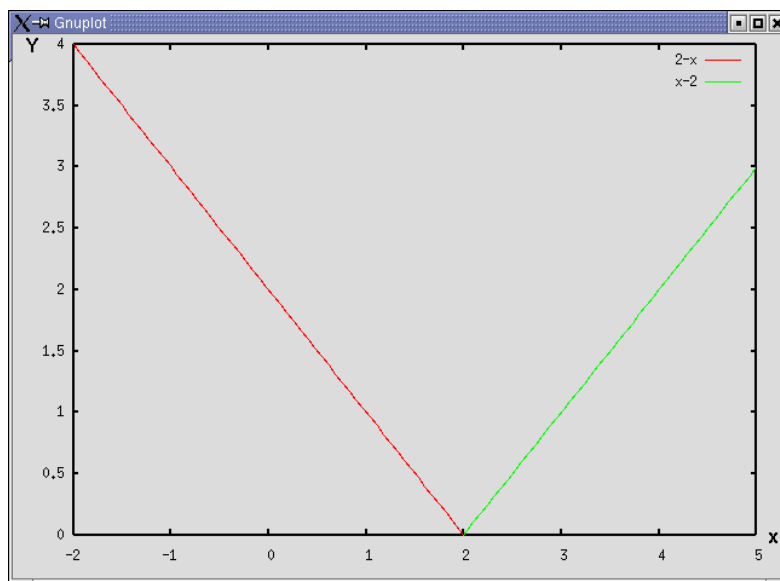
$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2} & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(δ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(Y \leq e^{-3}) = F_Y(e^{-3}) = 2 + \frac{1}{2}\ln(e^{-3}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Σχήμα 7: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$ **Άσκηση 9.**

(α)

Σχήμα 8: Γραφική παράσταση των $y = 2 - x$ και $y = 2 + x$

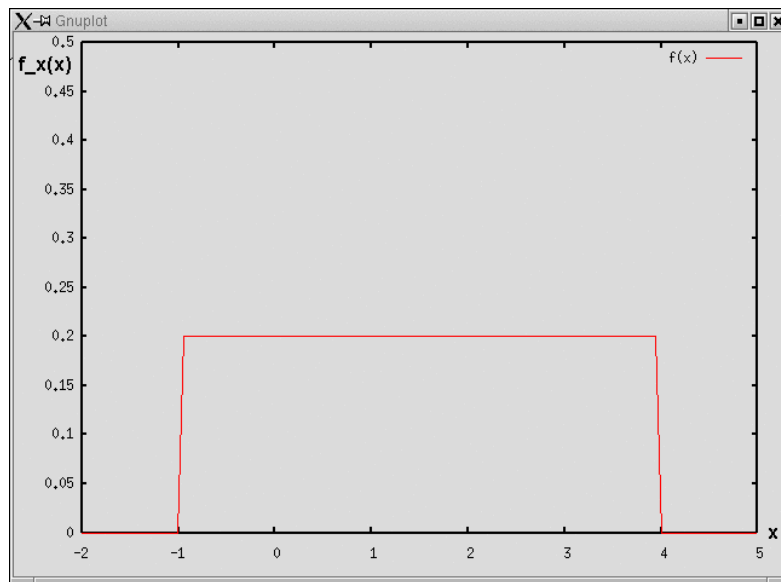
Το πεδίο τιμών της Y είναι το $[0, 3]$.

(β) Είναι:

$$E[Y] = E[|X - Z|] = \int_{-1}^4 \frac{1}{5} |x - 2| dx = \int_{-1}^2 \frac{1}{5} (2 - x) dx + \int_2^4 \frac{1}{5} (x - 2) dx = \frac{1}{5} \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^4 = 1.3$$

(γ) Έχουμε ότι:

- $y \leq 0$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$
- $y \geq 3$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1$
- $0 \leq y \leq 2$,

Σχήμα 9: Γραφική παράσταση της $f_X(x)$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(2 - y \leq X \leq 2 + y) \\ &= \frac{1}{5} [(2 + y) - (2 - y)] = 0.4y \end{aligned}$$

- $2 \leq y \leq 3$,

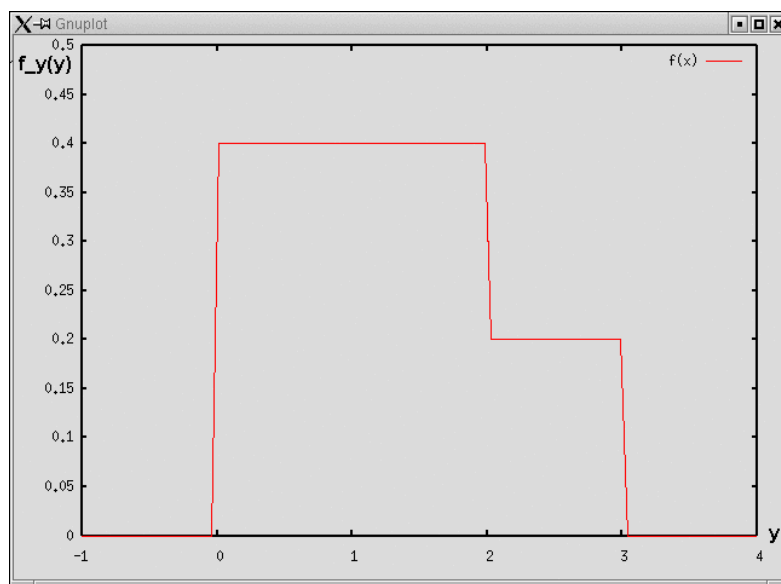
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(2 - y \leq X \leq 4) \\ &= \frac{1}{5} [4 - (2 - y)] = 0.2(2 + y) \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 0.4y & 0 \leq y \leq 2 \\ 0.2(2 + y) & 2 \leq y \leq 3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 0.4 & 0 \leq y \leq 2 \\ 0.2 & 2 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



Σχήμα 10: Γραφική παράσταση της $f_Y(y)$