

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2017-2018
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1. α) Παραγωγίζοντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, παίρνουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ xe^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Ισχύει ότι $f_X(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = \\ &= [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x}{e^x}\right) - 0 \right) + [-e^{-x}]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{e^x}\right) + (-0 + 1) = 1. \end{aligned}$$

Άρα η $F_X(x)$ είναι πράγματι αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

β) Έχουμε

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_X(5) = 1 - (1 - 6e^{-5}) = 6e^{-5}$$

και

$$P(2 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = F_X(4) - F_X(2) = 1 - 5e^{-4} - 1 + 3e^{-2} = -5e^{-4} + 3e^{-2}.$$

Άσκηση 2. α) Έχουμε

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \leq w) = P(\min\{X, Y, Z\} \leq w) = 1 - P(\min\{X, Y, Z\} > w) = 1 - P(X > w, Y > w, Z > w) = \\ &= 1 - P(X > w)P(Y > w)P(Z > w) = 1 - (1 - P(X \leq w))(1 - P(Y \leq w))(1 - P(Z \leq w)) = \\ &= 1 - (1 - F(w))(1 - F(w))(1 - F(w)) = 1 - (1 - F(w))^3 = \begin{cases} 0 & , w < 0 \\ 1 - e^{-w^9} & , w \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

β) Παραγωγίζοντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής που υπολογίσαμε παραπάνω, παίρνουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής W :

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & , w < 0 \\ 9w^8 e^{-w^9} & , w \geq 0 \end{cases}$$

Άσκηση 3. Έστω X τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τα χρόνια ζωής της ηλεκτρικής συσκευής.

α) $P(X \leq 15) = F_X(15) = 1 - e^{-\frac{15}{20}} = 1 - e^{-\frac{3}{4}}$

β) $P(X = 15) = 0$

γ) $P(X \geq 15) = P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - (1 - e^{-\frac{3}{4}}) = e^{-\frac{3}{4}}$

δ) $P(10 \leq X \leq 14) = P(X \leq 14) - P(X \leq 10) = F_X(14) - F_X(10) = 1 - e^{-\frac{14}{20}} - (1 - e^{-\frac{10}{20}}) = -e^{-\frac{7}{10}} + e^{-\frac{1}{2}}$

Άσκηση 4.

$$P\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 6x(1-x) dx = 6\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{9}{32}$$

Άσκηση 5. Έστω T η διάρκεια ζωής του ανταλλακτικού. Τότε $P(T > 200 | A) = 1$ ενώ

$$P(T > 200 | B) = P(X > 200) = \int_{200}^{+\infty} f_X(x) dx = [-e^{-\frac{1}{300}x}]_{200}^{+\infty} = e^{-\frac{2}{3}}.$$

Τώρα $P(T > 200) = P(T > 200 | A) \cdot P(A) + P(T > 200 | B) \cdot P(B)$.

Όμως $P(T > 200) = 0.9$, $P(B) = 1 - P(A)$ και συνεπώς

$$0.9 = 1 \cdot P(A) + e^{-\frac{2}{3}} \cdot (1 - P(A)) = P(A) - e^{-\frac{2}{3}} \cdot P(A) + e^{-\frac{2}{3}}$$

άρα

$$P(A) = \frac{0.9 - e^{-\frac{2}{3}}}{1 - e^{-\frac{2}{3}}}.$$

Άσκηση 6. Ισχύει ότι,

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = \begin{cases} 3\alpha^3 x^{-4}, & x \geq \alpha \\ 0, & x < \alpha \end{cases}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{\alpha}^{+\infty} x 3\alpha^3 x^{-4} dx \\ &= 3\alpha^3 \int_{\alpha}^{+\infty} x^{-3} dx \\ &= 3\alpha^3 \left(-\frac{1}{2} x^{-2}\right) \Big|_{\alpha}^{+\infty} \\ &= \frac{3\alpha}{2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{\alpha}^{+\infty} x^2 3\alpha^3 x^{-4} dx \\ &= 3\alpha^3 \int_{\alpha}^{+\infty} x^{-2} dx \\ &= 3\alpha^3 (-x^{-1}) \Big|_{\alpha}^{+\infty} \\ &= 3\alpha^2 \end{aligned}$$

Άρα, η διασπορά είναι,

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 3\alpha^2 - \left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$$

Άσκηση 7. Ισχύει ότι $X \sim N(500, 25)$, άρα $Z = \frac{X-500}{5} \sim N(0, 1)$.

α) Έχουμε

$$P(X \geq 490) = P\left(\frac{X - 500}{5} \geq \frac{490 - 500}{5}\right) = P(Z \geq -2) = 1 - P(Z \leq -2) = 1 - \Phi(-2) = 0.9772$$

Επομένως

$$P(1 \text{ από τα } 3 \text{ πακέτα έχει βάρος } \geq 490) = \binom{3}{1} (0.9772)^1 (1 - 0.9772)^2 = 0.001524$$

β) Έχουμε

$$\begin{aligned} P(490 \leq X \leq 505) &= P\left(\frac{490 - 500}{5} \leq \frac{X - 500}{5} \leq \frac{505 - 500}{5}\right) = P(-2 \leq Z \leq 1) = \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 = 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185 \end{aligned}$$

Επομένως

$$P(\text{και τα } 3 \text{ πακέτα είναι μεταξύ } 490 \text{ και } 505 \text{ γρ.}) = (0.8185)^3 = 0.54837$$