

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2017-2018
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/12/2017

Ημερομηνία Παράδοσης: 15/12/2017

Άσκηση 1. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - (x+1) \cdot e^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

- α) Δείξτε ότι η $F_X(x)$ είναι πράγματι αθροιστική συνάρτηση κατανομής.
β) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(X > 5)$ και $P(2 < X \leq 4)$.

Άσκηση 2. Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y, Z είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-x^3} & , x \geq 0 \end{cases}$$

- α) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $W = \min\{X, Y, Z\}$.
β) Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής W .

Άσκηση 3. Αν η διάρκεια ζωής μιας ηλεκτρικής συσκευής σε χρόνια είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{20}$, βρείτε την πιθανότητα η συσκευή να λειτουργεί:

- α) το πολύ 15 χρόνια,
β) ακριβώς 15 χρόνια,
γ) τουλάχιστον 15 χρόνια
δ) πάνω από 10 και κάτω από 14 χρόνια.

Άσκηση 4. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4})$ όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X είναι $f_X(x) = 6 \cdot x \cdot (1-x)$, $x \in (0, 1)$.

Άσκηση 5. Αν ένα ανταλλακτικό παράγεται από τη μονάδα παραγωγής A τότε η διάρκεια ζωής του ξεπερνά τις 200 ώρες, ενώ αν προέρχεται από τη μονάδα παραγωγής B η διάρκεια ζωής του είναι τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{300} \cdot e^{-\frac{1}{300} \cdot x}, \quad x > 0.$$

Στο σύνολο των χρησιμοποιούμενων εξαρτημάτων παρατηρήθηκε ότι το ποσοστό που υπερβαίνει τις 200 ώρες είναι 90%. Να βρεθεί το ποσοστό των εξαρτημάτων που προέρχεται από την ομάδα A .

Άσκηση 6. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X με αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^3}{x^3} & , x \geq a \\ 0 & , x < a \end{cases}$$

όπου a είναι μια θετική σταθερά.

Άσκηση 7. Η ποσότητα X του καφέ που βρίσκεται σε πακέτα των 500 γρ. είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 και διασπορά 25, $X \sim N(500, 25)$. Αγοράζουμε τρία πακέτα των 500 γρ. . Ποια είναι η πιθανότητα:

- α) ένα μόνο πακέτο από τα τρία να περιέχει τουλάχιστον 490 γρ. καφέ;
- β) το καθένα από τα τρία να έχει βάρος μεταξύ 490 και 505 γρ.;

Εκφράστε την απάντησή σας βάσει των τιμών $\Phi(2) = 0.9772$ και $\Phi(1) = 0.8413$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.