

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Σε κάθε περίπτωση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον σωστό κανόνα αρίθμησης. Πιο συγκεκριμένα :

(α) Έχουμε 10 επιλογές για τον πρώτουπολογιστή, 9 για τον δεύτερο, κ.ο.κ. Το πλήθος των μεταθέσεων είναι: $10! = 3628800$.

(β) Το πλήθος των διατεταγμένων διατεταγμένων ζάδων είναι:

$$\frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} = 1320.$$

(γ) Κάθε μία από τις 6 ρίψεις μπορεί να καταλήξει σε 2 αποτελέσματα, άρα το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων είναι: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 32$.

(δ) Εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, το πλήθος των συνδυασμών είναι:

$$\binom{100}{20} = \frac{100!}{20!(100-20)!} \simeq 5.359 \times 10^{20}.$$

(ε) Κάθε ζαριά έχει 6 δυνατά αποτελέσματα. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^7$ δυνατές επαναληπτικές διατάξεις.

(στ) Έχουμε 13 επιλογές για τον πρώτο που θα επιλέξουμε, 12 επιλογές για τον δεύτερο, κ.ο.κ. Συνεπώς, έχουμε συνολικά $13 \times 12 \times 11 \times \dots \times 1 = 13! = 6,227,020,800$ μεταθέσεις.

(ζ) Παρατηρήστε ότι τα φύλλα μοιράζονται με την σειρά, συνεπώς ψάχνουμε για διατεταγμένες δάδες. Έχουμε 52 επιλογές για το πρώτο χαρτί, 51 επιλογές για το δεύτερο χαρτί, κ.ο.κ. Συνεπώς, έχουμε $\frac{52!}{(52-8)!} = 30,342,338,208,000$ διαφορετικές δάδες.

(η) Κάθε κέρμα έχει 2 δυνατά αποτελέσματα και κάθε ζάρι 6 δυνατά αποτελέσματα. Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 = 576$ δυνατές εκδοχές.

Άσκηση 2.

(α) Ένα άθροισμα ίσο με 11 λαμβάνεται με τους ακόλουθους 6 συνδυασμούς:

$$(6, 4, 1)(6, 3, 2)(5, 5, 1)(5, 4, 2)(5, 3, 3)(4, 3, 3).$$

Ένα άθροισμα ίσο με 12 λαμβάνεται με τους ακόλουθους 6 συνδυασμούς:

$$(6, 5, 1)(6, 4, 2)(6, 3, 3)(5, 5, 2)(5, 4, 3)(4, 4, 4).$$

Κάθε συνδυασμός από 3 διακριτούς αριθμούς αντιστοιχεί σε 6 μεταθέσεις, ενώ κάθε συνδυασμός από 3 αριθμούς, 2 εκ των οποίων είναι ίσοι, αντιστοιχεί σε 3 μεταθέσεις.

Καταμετρώντας τον αριθμό των μεταθέσεων στους 6 συνδυασμούς που αντιστοιχούν σε ένα άθροισμα ίσο με 11, λαμβάνουμε: $6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 = 27$ μεταθέσεις.

Καταμετρώντας τον αριθμό των μεταθέσεων στους 6 συνδυασμούς που αντιστοιχούν σε ένα άθροισμα ίσο με 12, λαμβάνουμε: $6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$ μεταθέσεις.

Δεδομένου ότι όλες οι μεταθέσεις είναι ισοπίθανες, ένα άθροισμα ίσο με 11 είναι πιο πιθανό από ένα άθροισμα ίσο με 12.

Παρατήρηση: Ο δειγματοχώρος περιλαμβάνει $6^3 = 216$ στοιχεία, και ως εκ τούτου έχουμε:

$$P(11) = \frac{27}{216}, P(12) = \frac{25}{216}.$$

(β) Εδώ απλά θέλουμε να μοιράσουμε 9 "αντικείμενα" (τα 9 παιχνίδια) σε τρεις κατηγορίες των τεσσάρων, τριών και δύο. Συνεπώς υπάρχουν:

$$\binom{9}{4,3,2} = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260 \text{ τρόποι.}$$

Εναλλακτικά, αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε έναν έτοιμο τύπο, σκεφτόμαστε ως εξής: η πρώτη νίκη μπορεί να εμφανιστεί σε οποιονδήποτε από 9 αγώνες, η δεύτερη σε οποιονδήποτε από 8, κ.ο.κ., και για τα 9 αποτελέσματα, λαμβάνοντας τελικά $9!$ δυνατά αποτελέσματα.

Παρατηρήστε ότι οι νίκες εμφανίζονται με $4!$ διαφορετικές σειρές, οι ισοπαλίες με $3!$ διαφορετικές σειρές, και οι ήττες με $2!$ διαφορετικές σειρές. Για κάθε μία συγκεκριμένη ακολουθία αποτελεσμάτων όπου οι νίκες/ισοπαλίες/ήττες δεν είναι διακριτές, υπάρχουν $4! \times 3! \times 2!$ ακολουθίες όπου οι νίκες/ισοπαλίες/ήττες δεν είναι διακριτές. Άρα, αν X είναι ο ζητούμενος αριθμός, θα πρέπει:

$$X \times 4! \times 3! \times 2! = 9! \Rightarrow X = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260.$$

Άσκηση 3.

(α) Έστω X το πλήθος των φοιτητών που επιλέχθηκαν, και Y το πλήθος των καθηγητών. Εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των τριών ατόμων, υπολογίζουμε την ζητούμενη πιθανότητα ως εξής:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1, Y \geq 1) &= P(\{X = 1, Y = 2\} \cup \{X = 2, Y = 1\}) \\ &= P(\{X = 1, Y = 2\}) + P(\{X = 2, Y = 1\}) \\ &= \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40} + \frac{7}{40} = \frac{28}{40} = 0.7. \end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους.

(β) Εφόσον εδώ μας απασχολεί η σειρά με την οποία επιλέγονται τα "αντικείμενα" (δηλαδή τα μέλη της επιτροπής), υπολογίζουμε αυτήν την πιθανότητα βάσει του νέου δειγματικού χώρου Ω ο οποίος περιέχει όλες τις διατεταγμένες 3άδες, δηλαδή περιέχει:

$$|\Omega| = \frac{10!}{(10-3)!} = 720 \text{ στοιχεία.}$$

Το πλήθος των 3άδων που ανήκουν στο A είναι $3 \times 7 \times 6$, αφού έχουμε 3 επιλογές για τον φοιτητή που θα γίνει πρόεδρος, 7 επιλογές για τον καθηγητή που θα γίνει αντιπρόεδρος, και 6 επιλογές για τον καθηγητή που θα γίνει ταμίας (ανάμεσα στους 6 που μένουν). Άρα, η πιθανότητα του ενδεχομένου που μας ενδιαφέρει ισούται με:

$$P(A) = \frac{3 \times 7 \times 6}{720} = \frac{7}{40} \simeq 0.175.$$

Άσκηση 4.

(α) Για τη λέξη "ΣΟΥΒΛΑΚΙ", παρατηρούμε ότι όλα τα γράμματα εμφανίζονται από 1 φορά. Εφόσον λοιπόν όλα τα γράμματα είναι διακριτά, υπάρχουν $8!$ μεταθέσεις. Ως εκ τούτου, προκύπτει πως υπάρχουν $\frac{8!}{1!} = \frac{40320}{1} = 40320$ αναγραμματισμοί.

(β) Για τη λέξη "ΚΑΛΑΜΑΚΙ", παρατηρούμε ότι το γράμμα "Α" εμφανίζεται 3 φορές, ενώ όλα τα υπόλοιπα γράμματα από 1 φορά όπως και πριν. Θα υπήρχαν $8!$ μεταθέσεις αν όλα τα γράμματα εμφανίζονταν από 1 φορά. Εφόσον όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει, πρέπει να διαιρέσουμε με $3! = 6$, και τελικά προκύπτει πως υπάρχουν $\frac{8!}{3!} = \frac{40320}{6} = 6720$ αναγραμματισμοί.

(γ) Για τη λέξη "ΜΠΑΛΛΑΙΚΑ", παρατηρούμε ότι το γράμμα "Α" εμφανίζεται 4 φορές, το γράμμα "Λ" εμφανίζεται 2 φορές, ενώ τα υπόλοιπα γράμματα από 1 φορά. Θα υπήρχαν $10!$ μεταθέσεις αν όλα τα γράμματα εμφανίζονταν από 1 φορά. Εφόσον όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει, πρέπει να διαιρέσουμε με $4! \times 2! = 48$, και τελικά προκύπτει πως υπάρχουν $\frac{10!}{4! \times 2!} = \frac{3628800}{48} = 75600$ αναγραμματισμοί.

Άσκηση 5.

(α) Ο δειγματοχώρος του πειράματος αποτελείται από 9 ισοπίθانا ζευγάρια (i, j) με $i, j = 1, 2, 3$. Για κάθε τιμή της Τ.Μ. X ($0, \pm 1, \pm 2$), υπολογίζουμε το πλήθος των αποτελεσμάτων που δίνουν διαφορά που ισούται με τη αντίστοιχη τιμή της Τ.Μ. X . Για παράδειγμα, το γεγονός $\{X = 0\}$ προκύπτει όταν έρθουν οι 3 διπλές $(1, 1)$, $(2, 2)$, και $(3, 3)$.

Καταμετρώμε τον αριθμό των "ευνοϊκών" περιπτώσεων για κάθε ενδεχόμενο (τιμή της Τ.Μ. X) προς εκείνον των συνολικών πιθανών περιπτώσεων. Εύκολα προκύπτει τότε ότι η ζητούμενη συνάρτηση πιθανότητας μάζας θα έχει την ακόλουθη μορφή:

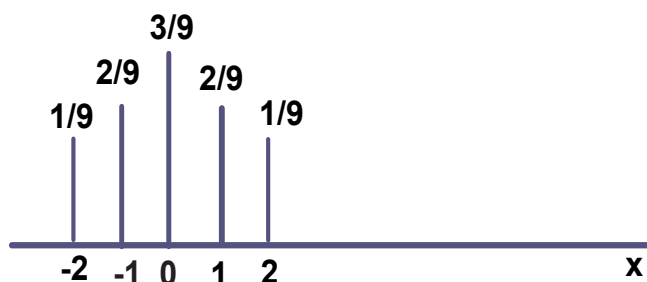
$$p_X(x) = \begin{cases} 1/9 & x = -2, 2 \\ 2/9 & x = -1, 1 \\ 3/9 & x = 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση πιθανότητας μάζας ικανοποιεί τη Συνθήκη Κανονικοποίησης, καθώς ισχύει:

$$\sum_{x=-2}^2 p_X(x) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

$p_x(x)$



(β) Έστω $Y = X^2$. Εύκολα προκύπτει ότι η Y παίρνει τις τιμές 0, 1, 4. Επίσης, $\{Y = 0\} \leftrightarrow \{X = 0\}$, $\{Y = 1\} \leftrightarrow \{X = -1\} \cup \{X = 1\}$ και $\{Y = 4\} \leftrightarrow \{X = -2\} \cup \{X = 2\}$.

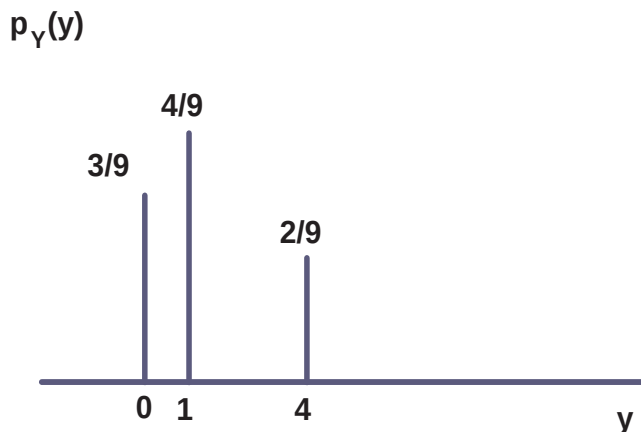
Ταιριάζοντας τις δυνατές τιμές του X και τις πιθανότητες τους με τις πιθανές τιμές του Y έχουμε:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/9 & y = 4 \\ 4/9 & y = 1 \\ 3/9 & y = 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Παρατηρείστε ότι και πάλι η συνάρτηση πιθανότητας μάζας ικανοποιεί τη Συνθήκη Κανονικοποίησης, καθώς ισχύει:

$$\sum_{y=0, y \neq 3}^4 p_Y(y) = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 1$$

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Άσκηση 6.

(α) Ορίζουμε την τ.μ. Y ως τον αριθμό των φίλων που έρχονται στην συναυλία μαζί σας και οι οποίοι δεν είναι συμφοιτητές σας στο HY-217. Προφανώς η Y παίρνει τις τιμές $Y = 0, 1, 2, 3, 4$. Καθώς $X = 10Y$, η τ.μ. X παίρνει τις τιμές $X = 0, 10, 20, 30, 40$.

(β) Επιλέγεται τέσσερις από τους εννιά φίλους σας για να έρθουν μαζί σας, και αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{9}{4} = 126$ τρόπους. Από την άλλη, υπάρχουν $\binom{5}{Y} \binom{4}{4-Y}$ τρόποι να επιλέξετε Y φίλους που δεν είναι συμφοιτητές σας στο HY-217 για να έρθουν μαζί σας στην συναυλία. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} p_X(0) &= P(X = 0) = P(Y = 0) = \frac{\binom{5}{0} \binom{4}{4}}{126} = \frac{1}{126} \\ p_X(10) &= P(X = 10) = P(Y = 1) = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{3}}{126} = \frac{20}{126} \\ p_X(20) &= P(X = 20) = P(Y = 2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{4}{2}}{126} = \frac{60}{126} \\ p_X(30) &= P(X = 30) = P(Y = 3) = \frac{\binom{5}{3} \binom{4}{1}}{126} = \frac{40}{126} \\ p_X(40) &= P(X = 40) = P(Y = 4) = \frac{\binom{5}{4} \binom{4}{0}}{126} = \frac{5}{126} \end{aligned}$$

(... και 0 αλλού!)

Άσκηση 7.

(α) Έστω L η διάρκεια του αγώνα. Αν ο Γιάννης κερδίσει έναν αγώνα αποτελούμενο από L παιχνίδια, τότε πρέπει να συμβούν $L - 1$ ισοπαλίες πριν κερδίσει. Αθροίζοντας για όλα τα πιθανά ενδεχόμενα, η πιθανότητα να κερδίσει ο Γιάννης τον αγώνα είναι:

$$P = \sum_{l=1}^{10} (0.3)^{l-1} (0.4) = 0.571425$$

(β) Ο αγώνας έχει διάρκεια L με $L < 10$, αν και μόνο αν έχουν λάβει χώρα $(L - 1)$ ισοπαλίες ακολουθούμενες από μία νίκη οποιουδήποτε παίκτη. Ως εκ τούτου, ο αγώνας έχει διάρκεια $L = 10$ αν και μόνο αν έχουν λάβει χώρα 9 ισοπαλίες. Δεδομένου ότι η πιθανότητα ισοπαλίας σε ένα παιχνίδι είναι 0.3, η πιθανότητα νίκης (δηλαδή μη-ισοπαλίας) οποιουδήποτε παίκτη είναι 0.7.

Με βάση τα παραπάνω, η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της διάρκειας του αγώνα θα είναι:

$$p_L(l) = P(L = l) = \begin{cases} (0.3)^{l-1}(0.4) & l = 1, 2, \dots, 9 \\ (0.3)^9 & l = 10 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Άσκηση 8.

(α) Αρχικά παρατηρούμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος έχει μέγεθος $|\Omega| = \binom{15}{5}$.

Αναφορικά με το πεδίο τιμών της τ.μ. X , S_X , δεδομένης της αρίθμησης με βάση την "αρχαιότητα στην βουλή" καθώς και του γεγονότος ότι ο πρόεδρος θα είναι ο αρχαιότερος της σχηματιζόμενης υποεπιτροπής, έχουμε: $S_X = \{5, 6, \dots, 15\}$.

Σχετικά με την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X παρατηρούμε ότι $X = x$, όπου $x = 5, 6, \dots, 15$ αν και μόνο αν επιλεγούν για την υποεπιτροπή το άτομο x και άλλα 4 άτομα αποκλειστικά στα πρώτα $x - 1$. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{x-1}{4}$ τρόπους. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X θα είναι:

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{\binom{x-1}{4}}{\binom{15}{5}}, x = 5, 6, \dots, 15$$

(β) Αναφορικά με το πεδίο τιμών της τ.μ. Y , S_Y , δεδομένης της αρίθμησης με βάση την "αρχαιότητα στην βουλή" καθώς και του γεγονότος ότι ο γραμματέας θα είναι ο δεύτερος αρχαιότερος της σχηματιζόμενης υποεπιτροπής (μετά τον πρόεδρό της), έχουμε: $S_Y = \{4, 5, \dots, 14\}$.

Σχετικά με την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y παρατηρούμε ότι $Y = y$, όπου $y = 4, 5, \dots, 14$ αν και μόνο αν επιλεγούν για την υποεπιτροπή κάποιο από τα άτομα $y + 1, y + 2, \dots, 15$, το άτομο y και άλλα 3 άτομα αποκλειστικά στα πρώτα $y - 1$. Αυτό μπορεί να γίνει με $(15 - y) \times \binom{y-1}{3}$ τρόπους. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y θα είναι:

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \frac{(15-y) \times \binom{y-1}{3}}{\binom{15}{5}}, y = 4, 5, \dots, 14$$