

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 14/12/2017

Ημερομηνία Παράδοσης: 9/1/2018

Άσκηση 1. Σε ένα μικροβιολογικό εργαστήριο καλλιεργούνται για μελέτη δύο μικροοργανισμοί, ο A και ο B. Ο χρόνος ζωής σε ημέρες των μικροοργανισμών δίνεται αντίστοιχα από τις τυχαίες μεταβλητές X και Y. Η από κοινού σ.π.π δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x - y)^2, & 0 \leq x, \quad y < 10 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

και $c \in R$ μια σταθερά.

(α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c .

(β) Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.

(γ) Να βρεθεί η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x, y)$.

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα κανένας από τους δύο μικροοργανισμούς να ζήσει περισσότερο από δύο μέρες;

(ε) Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένας από τους δύο μικροοργανισμούς να ζήσει περισσότερο από πέντε μέρες;

Άσκηση 2. Μια εταιρία διανέμει στο εμπόριο σκευάσματα συμπληρωμάτων διατροφής που περιέχουν τρεις διαφορετικές βιταμίνες, την A, την B και την Γ. Κάθε τέτοια συσκευασία ζυγίζει δύο γραμμάρια. Τα βάρη των βιταμινών A και B, που περιέχονται σε κάθε συσκευασία, δίνονται από τις τυχαίες μεταβλητές X και Y αντίστοιχα, με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad x + y \leq 2 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

όπου c είναι μια θετική σταθερά. Το βάρος της Γ δίνεται από την μεταβλητή $Z = 2 - X - Y$.

(α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c .

(β) Να βρεθούν η περιθωριακή συνάρτηση πυκνότητας, η μέση τιμή και η διασπορά των X και Y.

(γ) Να βρεθεί η συνδιασπορά των τυχαίων μεταβλητών (X,Y),(X,Z),(Y,Z).

Άσκηση 3. Οι τ.μ. X και Y είναι από κοινού Γκαουσιανές με μέση τιμή μηδέν και διασπορά μονάδα. Επίσης, ισχύει ότι $E[XY] = 0.5$. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $W = X + Y$ και $Z = |W|$.

Άσκηση 4. Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x, y) = \begin{cases} 12xy(1-x), & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

(α) Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y .

(β) Να εξετάσετε αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(γ) Να βρεθούν:

(i) Η μέση τιμή των τ.μ X και Y , $E[X]$ και $E[Y]$ αντίστοιχα.

(ii) Η διασπορά των τ.μ X και Y , $var[X]$ και $var[Y]$.

(δ) Ποια είναι η συνδιασπορά των τ.μ. X και Y , $cov(X, Y)$;

Άσκηση 5. Μια εταιρία διανέμει δύο διαφορετικής ποιότητας ελαστικά, τα Α και τα Β. Ο αριθμός των χιλιομέτρων (σε δεκάδες χιλιάδες) που μπορεί να διανύσει ένα μηχανάκι με ελαστικά τύπου Α, μέχρι εκείνα να χρειαστεί να αντικατασταθούν, περιγράφεται από την τ.μ. X , η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας ίση με $f_X(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}$, $x > 0$. Ο αντίστοιχος αριθμός χιλιομέτρων (σε δεκάδες χιλιάδες) για τα ελαστικά τύπου Β περιγράφεται από την τ.μ. Y , η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας ίση με $f_Y(y) = \frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}}$, $y > 0$. Οι τ.μ. X και Y είναι συνεχείς και ανεξάρτητες. Έστω ότι παίρνουμε ένα μηχανάκι και του τοποθετούμε ένα ελαστικό τύπου Α και ένα τύπου Β.

(α) Ποια η πιθανότητα το ελαστικό τύπου Α να φθαρεί πριν το ελαστικό τύπου Β.

(β) Ποια η πιθανότητα με το ελαστικό τύπου Β να διανυθούν τουλάχιστον 10.000 χιλιόμετρα περισσότερα από ότι με το ελαστικό τύπου Α.

Άσκηση 6. Έστω τ.μ. X η εβδομαδιαία ζήτηση βενζίνης (σε χιλιάδες γαλόνια) σε ένα βενζινάδικο. Η σ.π.π της X δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(u) = \begin{cases} u, & 0 \leq u \leq 1, \\ 2 - u, & 1 \leq u \leq 2, \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

Έστω C η χωρητικότητα (σε χιλιάδες γαλόνια) της αποθήκης του βενζινάδικου, η οποία ξαναγεμίζει κάθε βδομάδα. Ο ιδιοκτήτης του βενζινάδικου ενδιαφέρεται για την τ.μ. Y , δηλαδή της ποσότητας (σε χιλιάδες γαλόνια) βενζίνης που πωλείται σε μια βδομάδα. Σημειώστε ότι η βενζίνη που πωλείται δεν μπορεί να υπερβεί την χωρητικότητα της αποθήκης, δηλαδή $Y \leq C$. Υποθέστε ακόμη ότι το ακαθάριστο κέρδος για κάθε γαλόνι που πωλείται είναι 0.64 ευρώ.

(α) Σχεδιάστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(u)$ και δείξτε ότι είναι μια έγκυρη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

(β) Υποθέστε ότι $C = 1$ και παρατηρούμε ότι $X=1.105$. Μπορεί το βενζινάδικο να ικανοποιήσει τη ζήτηση;

(γ) Υπολογίστε και σχεδιάστε την πιθανότητα να ικανοποιείται η ζήτηση $P(X < C)$, ως συνάρτηση του C . Ποια είναι η πιθανότητα ότι ικανοποιείται η ζήτηση όταν $C = 1$.

(δ) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του C που διασφαλίζει ότι η πιθανότητα η ζήτηση να υπερβαίνει την χωρητικότητα δεν είναι μεγαλύτερη από 10^{-1} ;

(ε) Σχεδιάστε την αναμενόμενη τιμή του εβδομαδιαίου ακαθάριστου κέρδους, συναρτήσει του C .

(στ) Υποθέστε ότι ο ιδιοκτήτης πληρώνει $10C$ ευρώ σαν εβδομαδιαίο νοίκι για μια δεξαμενή χωρητικότητας $1000C$ γαλονιών. Σχεδιάστε την αναμενόμενη τιμή του εβδομαδιαίου καθαρού κέρδους συναρτήσει του C . Ποια τιμή της C μεγιστοποιεί το κέρδος;

Άσκηση 7. Υποθέστε ότι το βάρος των κερασιών ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 8 γραμμάρια και τυπική απόκλιση 1.5 γραμμάρια, $X \sim N(8, 2.25)$.

(α) Εάν επιλέξουμε ένα κεράσι στην τύχη, ποια η πιθανότητα να ζυγίζει περισσότερο από 11.5 γραμμάρια;

(β) Εάν επιλέξουμε ένα κεράσι στην τύχη, ποια η πιθανότητα να ζυγίζει λιγότερο από 8.7 γραμμάρια;

(γ) Εάν επιλέξουμε ένα κεράσι στην τύχη, ποια η πιθανότητα να έχει βάρος μεταξύ 6.2 και 7 γραμμάρια;

Άσκηση 8. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των τιμών 1 και 2, δηλαδή: $X \sim U[1,2]$.

Ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή ως εξής: $Y = e^{-2X}$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$ καθώς και αυτή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, $f_X(x)$ της τ.μ X .

(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$ της τυχαίας μεταβλητής Y και δώστε τη γραφική παράστασή της.

(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$ της Y και δώστε τη γραφική παράστασή της.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y \leq e^{-3})$.

Άσκηση 9. Έστω ότι η τ.μ. X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[-1,4]$. Η X μετασχηματίζεται στην τ.μ. $Y=X-2$.

(α) Δώστε την γραφική παράσταση του μετασχηματισμού και βρείτε το πεδίο τιμών της Y .

(β) Βρείτε την μέση τιμή της τ.μ. Y .

(γ) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$, και κατόπιν την συνάρτηση πυκνότητας, $f_Y(y)$, της τ.μ. Y .