

**HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2017**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/10/2017

Ημερομηνία Παράδοσης: 24/10/2017

**Θέματα: Δεσμευμένη Πιθανότητα, ΘΟΠ, Νόμος του Bayes, Ανεξαρτησία.**

**Άσκηση 1.** Σε μια περιοχή υπάρχουν τρεις πόλεις, οι Α, Β και Γ. Από την πόλη Α, το 40% των κατοίκων είναι χορτοφάγοι, στην πόλη Β το ποσοστό φτάνει το 20%, και στην Γ είναι 30%. Γνωρίζουμε ακόμα ότι οι κάτοικοι της πόλης Α αποτελούν το 20% του πληθυσμού των παραπάνω πόλεων ενώ οι κάτοικοι της πόλης Γ το 50%. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο.

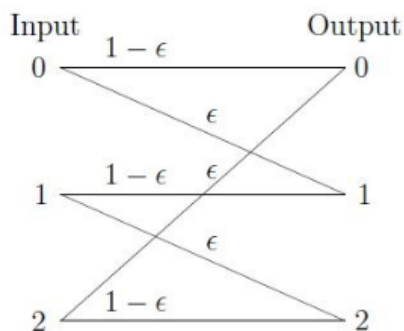
(α) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι χορτοφάγος;

(β) Δεδομένου ότι είναι χορτοφάγος, ποια η πιθανότητα να είναι κάτοικος της πόλης Α;

**Άσκηση 2.** Το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης για ένα τριαδικό κανάλι φαίνεται στο Σχήμα 1. Υποθέστε ότι τα σύμβολα 0,1 και 2 στέλνονται με πιθανότητες  $1/2, 1/4$  και  $1/4$  αντίστοιχα.

(α) Βρείτε τις πιθανότητες λήψης συμβόλων.

(β) Δεδομένου ότι λαμβάνεται 1, βρείτε τις πιθανότητες να εστάλη 0,1 ή 2. Να απαντήσετε συναρτήσει του όρου  $\epsilon$  (όπως φαίνεται και από το Σχήμα 1, το  $\epsilon$  είναι η πιθανότητα η έξοδος του καναλιού να έχει διαφορετικό σύμβολο από αυτό της εισόδου. Αντίστοιχα, το  $1-\epsilon$  είναι η πιθανότητα η έξοδος να έχει το ίδιο σύμβολο με την είσοδο).



Σχήμα 1: Διάγραμμα Πιθανοτήτων Μεταβάσεων

**Άσκηση 3.** Έχουμε δύο κουτιά, το Α και το Β, στα οποία ρίχνουμε μέσα τυχαία τρεις μπάλες. Έστω ο δειγματοχώρος  $\Omega = \{0,1,2,3\}$  και έστω  $\omega$  οι μπάλες που μπήκαν στο πρώτο κουτί. Θεωρούμε τα 4 αποτελέσματα του  $\omega$  ισοπίθανα. Θεωρούμε ακόμα τα ενδεχόμενα:

$A = \{ \text{Το πρώτο κουτί περιέχει τουλάχιστον μία μπάλα} \}$

$B = \{ \text{Το δεύτερο κουτί περιέχει τουλάχιστον δύο μπάλες} \}$

(α) Να υπολογιστούν τα  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(A \cup B)$

(β) Είναι τα Α και Β ανεξάρτητα;

(γ) Είναι τα Α και  $A^c$  ανεξάρτητα;

(δ) Είναι τα Β και  $B^c$  ανεξάρτητα;

(ε) Είναι τα Α και  $A \cup B$  ανεξάρτητα;

(στ) Είναι τα Α και  $A \cap B$  ανεξάρτητα;

**Άσκηση 4.** Μας δίνονται δύο 'πειραγμένα' νομίσματα εκ των οποίων το ένα φέρνει κεφαλή με πιθανότητα  $1/3$  και το άλλο φέρνει κεφαλή με πιθανότητα  $2/3$ . Τα δύο νομίσματα φαίνονται να είναι πανομοιότυπα: δεν μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε εξ όψεως. Ρίχνουμε τα δύο νομίσματα από μία φορά το καθένα διαλέγοντας στην τύχη (με πιθανότητα  $1/2$ ) ποιο θα ρίξουμε πρώτο. Ορίζουμε τα γεγονότα:  $H_i = \{ \text{η } i\text{-στή ρίψη φέρνει κεφαλή} \}$ ,  $i = 1, 2$ .

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες  $P(H_1)$  και  $P(H_2)$

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι και οι δύο ρίψεις φέρνουν κεφαλή, δηλαδή  $P(H_1 \cap H_2)$

(γ) Είναι τα γεγονότα  $H_1$  και  $H_2$  ανεξάρτητα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**Άσκηση 5.** Ο Κώστας και ο Γιάννης παίζουν ένα παιχνίδι με ένα δίκαιο ζάρι. Κάποια στιγμή, ο Κώστας ρίχνει το ζάρι χωρίς να το δει ο Γιάννης, και του λέει ότι έφερε έξι. Ο Γιάννης ξέρει ότι ο Κώστας λέει την αλήθεια δύο στις τρεις φορές. Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας να έλεγε αυτήν την φορά την αλήθεια και να έφερε έξι;

**Άσκηση 6.** Ανεξαρτησία γεγονότων:

(α) Να αποδειχτεί ότι αν τα γεγονότα Α και Β είναι ανεξάρτητα, τότε είναι ανεξάρτητα και τα συμπληρωματικά τους ενδεχόμενα.

(β) Αν τα γεγονότα Α, Β και Γ είναι ανεξάρτητα, να εξεταστεί αν είναι επίσης ανεξάρτητα τα γεγονότα:

(i)  $A \cup B, \Gamma$

(ii)  $A, B \cap \Gamma$

**Άσκηση 7.** Ο Αλέξανδρος γνωρίζει τρεις κοπέλες, την Μαρία, την Ελένη και την Γεωργία. Επιλέγει μια από αυτές στην τύχη, της κάνει ερωτική εξομολόγηση αλλά εκείνη τον απορρίπτει. Εάν γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να ανταποκριθούν οι κοπέλες θετικά είναι 90% για την Μαρία, 50% για την Γεωργία και 5% για την Ελένη, πια η πιθανότητα ο Αλέξανδρος να επέλεξε την Μαρία;

**Άσκηση 8.** Η Σοφία περνά μπροστά από ένα κουτί που περιέχει δύο ειδών σοκολάτες: ΙΟΝ γάλακτος και ΙΟΝ αμυγδάλου. Στο κουτί υπάρχουν τρεις φορές περισσότερες ΙΟΝ γάλακτος από ΙΟΝ αμυγδάλου. Η Σοφία επιλέγει μία σοκολάτα στην τύχη. Αν επιλέξει μία ΙΟΝ γάλακτος, την τρώει με πιθανότητα  $1/5$ . Αν επιλέξει μία ΙΟΝ αμυγδάλου, την τρώει με πιθανότητα  $2/5$ . Με ποια πιθανότητα η Σοφία τρώει την σοκολάτα που επέλεξε;