

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2017

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

3ο Φροντιστήριο HY-217

Άσκηση 1.

Το δελτίο καιρού για μια τυχαία μέρα του έτους μπορεί να λέει ήλιος, συννεφιά βροχή ή χιόνι. Υποθέτουμε τέσσερις εποχές, (“φθινόπωρο”, “χειμώνας”, “άνοιξη”, “καλοκαίρι”) με 90 ημέρες στην κάθε εποχή, και ότι χιόνι μπορεί να πέσει μόνο τον χειμώνα, και επίσης ότι δε βρέχει το καλοκαίρι. Πόσα ετήσια δελτία καιρού είναι δυνατά, δηλαδή ποιο είναι το πλήθος όλων των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού ($4 \cdot 90$) 360 ημερών;

Λύση.

Την άνοιξη και το φθινόπωρο, κάθε μέρα έχει τρεις πιθανές καταστάσεις για τον καιρό (“ήλιος”, “συννεφιά”, “βροχή”), συνεπώς για κάθε μια από αυτές τις εποχές το συνολικό πλήθος των καταστάσεων είναι: $3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3 = 3^{90}$.

Ομοίως, υπάρχουν 4^{90} καταστάσεις για τον χειμώνα (“ήλιος”, “συννεφιά”, “βροχή”, “χιόνι”), και 2^{90} καταστάσεις για το καλοκαίρι (“ήλιος”, “συννεφιά”).

Το συνολικό πλήθος όλων των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού για 360 μέρες είναι:

$$3^{90} \times 3^{90} \times 4^{90} \times 2^{90} \approx 10^{167}$$

Άσκηση 2.

Πόσους αναγραμματισμούς μπορούμε να κάνουμε στις παρακάτω λέξεις;

(α) children

(β) bookkeeper

Λύση.

Ο τύπος για τους ανασυνδυασμούς n αντικειμένων, εκ των οποίων υπάρχουν k_1 αντικείμενα τύπου 1, k_2 αντικείμενα τύπου 2, $\dots$, k_m αντικείμενα τύπου m είναι:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

Με βάση αυτόν τον τύπο η λύση του προβλήματος είναι απλή :

(α) Με τη λέξη children μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{8!}{1!1!1!1!1!1!1!} = 8! \text{ αναγραμματισμούς,}$$

διότι κανένα γράμμα δεν εμφανίζεται παραπάνω από 1 φορά.

(β) Με τη λέξη bookkeeper μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{10!}{1!2!2!3!1!1!} = \frac{10!}{3!2!2!} \text{ αναγραμματισμούς}$$

Άσκηση 3.

Ένα άτομο έχει 8 φίλους, 5 από τους οποίους θέλει να καλέσει σε ένα πάρτι.

(α) Πόσες επιλογές έχει, αν δύο από τους φίλους του έχουν μαλώσει και δεν γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως;

(β) Πόσες επιλογές έχει αν δύο από τους φίλους του είναι ζευγάρι και πρέπει να προσκληθούν συγχρόνως;

Λύση.

(α) Εδώ έχουμε 2 περιπτώσεις αν δύο άτομα δε γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως: είτε δε θα προσκληθεί κανένας από τους δύο, είτε θα προσκληθεί μόνο ένας εκ των δύο. Στη συνέχεια το σύνολο χωρίζεται σε δύο υποσύνολα : Το ένα περιέχει τα 2 άτομα που έχουν μαλώσει και το άλλο τα εναπομείναντα 6 από τα συνολικά 8 άτομα. Στην πρώτη περίπτωση το άτομο δε θα καλέσει κανένα από τους δύο, διαλέγοντας 0 άτομα από το σύνολο των 2 και θα καλέσει και τα 5 άτομα από το σύνολο των 6. Στη δεύτερη περίπτωση το άτομο θα καλέσει έναν εκ των δύο, διαλέγοντας 1 άτομο από το σύνολο των 2 και θα καλέσει τα υπόλοιπα 4 άτομα από το σύνολο των 6.

Οπότε τελικά το συνολικό πλήθος των επιλογών θα είναι:

$$C(2, 0) \cdot C(6, 5) + C(2, 1) \cdot C(6, 4) = \binom{2}{0} \cdot \binom{6}{5} + \binom{2}{1} \cdot \binom{6}{4} = \binom{6}{5} + 2 \cdot \binom{6}{4}$$

(β) Εδώ έχουμε 2 περιπτώσεις αν δύο άτομα είναι ζευγάρι: είτε δε θα προσκληθεί κανένας από τους δύο, είτε θα προσκληθούν και οι δύο. Στη συνέχεια το σύνολο χωρίζεται σε δύο υποσύνολα : Το ένα περιέχει τα 2 άτομα που είναι ζευγάρι και το άλλο τα εναπομείναντα 6 από τα συνολικά 8 άτομα. Στην πρώτη περίπτωση το άτομο δε θα καλέσει κανένα από τους δύο, διαλέγοντας 0 άτομα από το σύνολο των 2 και θα καλέσει και τα 5 άτομα από το σύνολο των 6. Στη δεύτερη περίπτωση το άτομο θα καλέσει και τους δύο, διαλέγοντας και τα 2 άτομα από το σύνολο των 2 και θα καλέσει τα υπόλοιπα 3 άτομα από το σύνολο των 6.

Οπότε τελικά το συνολικό πλήθος των επιλογών θα είναι:

$$C(2, 0) \cdot C(6, 5) + C(2, 2) \cdot C(6, 3) = \binom{2}{0} \cdot \binom{6}{5} + \binom{2}{2} \cdot \binom{6}{3} = \binom{6}{5} + 2 \cdot \binom{6}{3}$$

Άσκηση 4. Τραβάμε 7 χαρτιά από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 χαρτιών.

Βρείτε την πιθανότητα ότι:

(α) Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους.

(β) Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες

(γ) Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους ή 2 βαλέδες

Λύση.

(α) Ορίζουμε το γεγονός: $A = \{\text{Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους}\}$.

Συνολικά υπάρχουν $\binom{52}{7}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 7 φύλλα από μια τράπουλα 52 φύλλων. Ας μετρήσουμε πόσοι από τους συνδυασμούς αυτούς περιέχουν ακριβώς 3 άσσους: Ακολουθούμε και πάλι το σκεπτικό ότι σπάμε το αρχικό σύνολο σε υποσύνολα και μετράμε τους συνδυασμούς μέσα σε αυτά. Συγκεκριμένα, εδώ έχουμε ένα υποσύνολο που περιέχει τους 4 άσσους και άλλο ένα που περιέχει τα υπόλοιπα 48, τα οποία δεν είναι άσσοι εκ των συνολικά 52 χαρτιών.

Υπάρχουν λοιπόν δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 3 από τους 4 άσσους και δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε τα υπόλοιπα 4 φύλλα από τα 48 φύλλα της τράπουλας που έχουν απομείνει. Συνεπώς, υπάρχουν δυνατοί συνδυασμοί να τραβήξουμε 7 φύλλα που να περιέχουν ακριβώς 3 άσσους. Για να βρούμε τη πιθανότητα ότι στα 7 φύλλα περιέχονται 3 άσσοι, διαιρούμε αυτό τον αριθμό με το συνολικό πλήθος των δυνατών συνδυασμών να διαλέξουμε 7 φύλλα από μια τράπουλα των 52 φύλλων:

$$\frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{4}}{\binom{52}{7}}$$

(β) Με ανάλογο συλλογισμό όπως παραπάνω, υπάρχουν $\binom{4}{2}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 2 από τους 4 βαλέδες, και $\binom{48}{5}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε τα υπόλοιπα 5 φύλλα από τα 48 φύλλα της τράπουλας που έχουν απομείνει.

Συνεπώς, υπάρχουν $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5}$ δυνατοί συνδυασμοί να τραβήξουμε 7 φύλλα, που να περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες. Η πιθανότητα στα 7 φύλλα να περιέχονται 2 βαλέδες είναι:

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5}}{\binom{52}{7}}$$

(γ) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$A = \{\text{Τραβήξαμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 3 άσσους}\}$

$B = \{\text{Τραβήξαμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες}\}$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα της ένωσης: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ είναι γνωστές, από τα προηγούμενα ερωτήματα, άρα πρέπει να βρούμε την πιθανότητα $P(A \cap B)$. Το γεγονός $(A \cap B)$ συμβαίνει με την επιλογή 3 από τους 4 άσσους, 2 από τους 4 βαλέδες, και 2 από τα υπόλοιπα 44 χαρτιά.

Συνολικά λοιπόν, υπάρχουν $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{2}$ δυνατοί τρόποι για να επιλέξουμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 3 άσσους και 2 βαλέδες.

Άσκηση 5. Το κατάστημα της γειτονιάς σας πραγματοποιεί εκκαθάριση. Τα πάντα πρέπει να πωληθούν, νέα και παλιά. Το κατάστημα έχει 1000 παλιά κομμάτια και 1500 καινούρια. Το πρόβλημα είναι ότι 15% των παλιών είναι ελαττωματικά καθώς και 5% των νέων.

(α) Ρίχνετε ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσετε αν θα αγοράσετε παλιό ή νέο προϊόν. Διαλέγετε δύο κομμάτια του ίδιου τύπου (νέα ή παλιά) ανάλογα με το αποτέλεσμα μιας και μοναδικής ρίψης του κέρματος. Ποια η πιθανότητα ότι και τα δύο θα είναι ελαττωματικά;

(β) Δεδομένων των συνθηκών στο (α), και του ότι και τα δύο αντικείμενα είναι ελαττωματικά, ποια είναι η πιθανότητα ότι και τα δύο θα είναι ελαττωματικά;

Λύση.

(α) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα: $A = \{\text{Τα επιλεγμένα κομμάτια είναι ελαττωματικά}\}$

$B_1 = \{\text{Επιλέγονται δύο παλιά κομμάτια}\}$

$B_2 = \{\text{Επιλέγονται δύο νέα κομμάτια}\}$

Τα γεγονότα B_1 και B_2 είναι ξένα και αποτελούν μια διαμέριση του Ω το καθένα με θετική πιθανότητα. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα, σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, ισούται με:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

Τα κομμάτια έχουν ίση πιθανότητα να είναι καινούρια ή παλιά, λόγω της επιλογής μέσω ρίψης δίκαιου κέρματος, άρα: $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$.

Υπάρχουν $\binom{1000}{2}$ τρόποι, με ίση πιθανότητα, επιλογής δύο παλιών κομματιών από ένα σύνολο από 1000 παλιά κομμάτια. Εφόσον 15% των παλιών κομματιών είναι ελαττωματικά, υπάρχουν 150 ελαττωματικά παλιά κομμάτια.

Υπάρχουν $\binom{150}{2}$ τρόποι επιλογής 2 ελαττωματικών παλιών κομματιών από ένα σύνολο από 150 ελαττωματικά παλιά κομμάτια. Επομένως θα έχουμε:

$$P(A|B_1) = \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}$$

Παρομοίως, ένα 5% από τα νέα κομμάτια (75) είναι ελαττωματικά. Δεδομένου ότι δύο νέα κομμάτια επιλέγονται θα έχουμε:

$$P(A|B_2) = \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}$$

Άρα τελικά έχουμε:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}$$

(β) Ψάχνουμε την πιθανότητα: $P(B_1|A)$. Σε αντιστοιχία με τη θεωρία, η παρατήρηση/ αποτέλεσμα είναι ότι τα αντικείμενα είναι ελαττωματικά και η αιτία για την οποία ψάχνουμε κατά πόσον συμβάλλει στο αποτέλεσμα είναι η παλαιότητα των κομματιών. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τον κανόνα του Bayes θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(B_1) \cdot P(A|B_1)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)} \\ &= \frac{1/2 \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}}{1/2 \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + 1/2 \cdot \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}} \end{aligned}$$