Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217 - Θεωρία Πιθανοτήτων
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Λύσεις Προόδου- 12 Νοεμβρίου 2016

Θέμα 1 - (10 μονάδες)

(α) Ο δειγματοχώρος Ω του πειράματος είναι:

$$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$$

Το κέρμα είναι δίκαιο, επομένως κάθε δειγματοσημείο έχει πιθανότητα ίση με $1/2$, οπότε:

A=$\{K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$ και $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$

B= $\{KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K,\}$ και $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}$

$A \cap B$ = $\{K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K\}$=$\{$ακριβώς 1 Κ$\}$ και $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$

Προφανώς ισχύει ότι: $A \cap B = \frac{3}{8} = P(A) \cdot P(B)$

Συνεπώς τα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

(β) Αφού τα C και D είναι ανεξάρτητα ισχύει ότι: $P(C \cap D) = P(D) \cdot P(C)$ (1)
Από τα δεδομένα της άσκησης ισχύει ότι: $D \subset C \Rightarrow C \cap D = D \Rightarrow P(C \cap D) = P(D)$ (2)
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι : $P(C) \cdot P(D) = P(D) \Rightarrow P(D) \cdot [P(C) - 1] = 0 \Rightarrow P(D) = 0$ ή $P(C) = 1$ που ήταν και το ζητούμενο της άσκησης.

Θέμα 2 - (15 μονάδες)

(α) Υπάρχουν $\binom{8}{5} = 56$ τρόποι να επιλεγεί η αρχική πεντάδα. Το πλήθος των πεντάδων που δεν περιέχουν κανέναν από τους δύο φίλους είναι $\binom{6}{5} = 6$. Συνεπώς η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: $\{$ο Χρήστος ή ο Αντρέας ή και οι δυο τους να αρχίσουν τον αγώνα$\}$ είναι ίση με:

$$P(A) = \frac{56 - 6}{56} = \frac{50}{56} = \frac{25}{28} = 0.8929$$

(β) Παρατηρούμε στο σχήμα ότι **ΔΕΝ** σχηματίζεται τρίγωνο όταν οι τρεις κουκκίδες επιλέγονται όλες είτε στην πάνω είτε στην κάτω σειρά. Υπάρχουν $\binom{11}{3} = 165$ τρόποι να επιλέξουμε τρεις κουκκίδες. Υπάρχουν $\binom{5}{3} = 10$ τρόποι να επιλέξουμε τρεις κουκκίδες στην **πάνω** σειρά. Υπάρχουν $\binom{6}{3} = 20$ τρόποι να επιλέξουμε τρεις κουκκίδες στην **κάτω** σειρά. Επομένως η πιθανότητα του ενδεχομένου Β: $\{$ Σχηματίζεται τρίγωνο $\}$ είναι:

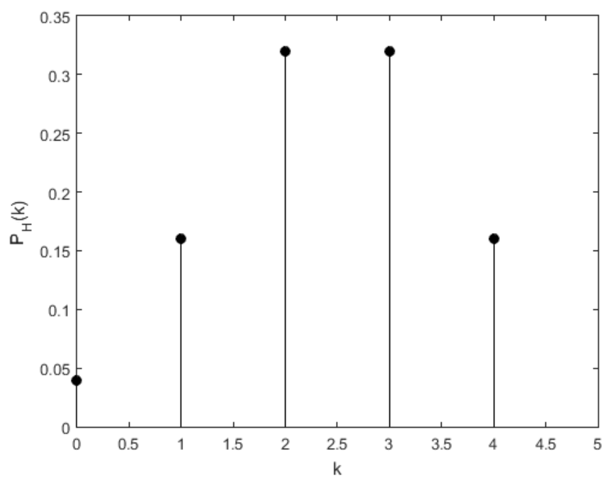
$$P(B) = \frac{165 - 10 - 20}{165} = \frac{135}{165} = \frac{9}{11} = 0.8182$$

Θέμα 3 - (25 μονάδες)

(α) Η τ.μ παίρνει:
Την τιμή 0 για την κορυφή: (0,0)
Την τιμή 1 για τις 4 κορυφές: (1,0)(0,1)(-1,0)(0,-1)
Την τιμή 2 για τις 8 κορυφές: (2,0) (1,1) (0,2) (-1,1) (-2,0) (-1,-1) (0,-2) (1,-1)
Την τιμή 3 για τις 8 κορυφές: (2,1) (1,2) (-1,2) (-2,1) (-2,-1) (-1,-2) (1,-2) (2,-1)
Την τιμή 4 για τις 4 κορυφές: (2,2) (-2,2) (-2,-2) (2,-2)

Συνεπώς:

$$P_H(k) = \begin{cases} \frac{1}{25}, & k=0 \\ \frac{4}{25}, & k=1 \\ \frac{8}{25}, & k=2 \\ \frac{8}{25}, & k=3 \\ \frac{4}{25}, & k=4 \end{cases}$$

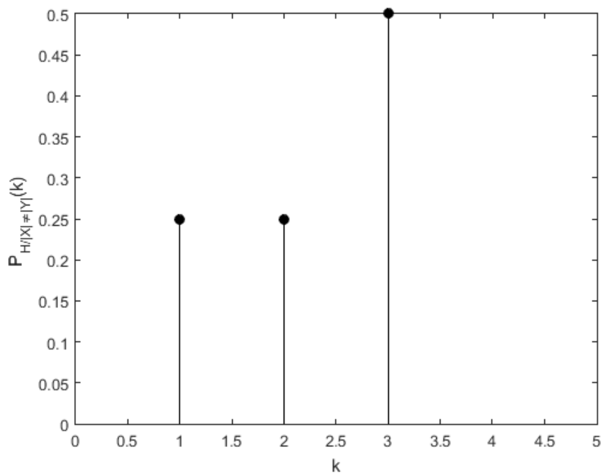


Σχήμα 1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας.

(β) Υπάρχουν 16 κορυφές για τις οποίες ισχύει ότι $|x| \neq |y|$. Για αυτές ισχύει ότι η τ.μ H παίρνει:
Την τιμή 1 για τις 4 κορυφές: (1,0)(0,1)(-1,0)(0,-1)
Την τιμή 2 για τις 4 κορυφές: (2,0)(0,2)(-2,0)(0,-2)
Την τιμή 3 για τις 8 κορυφές: (2,1) (1,2) (-1,2) (-2,1) (-2,-1) (-1,-2) (1,-2) (2,-1)

Συνεπώς:

$$P_{H/|x|\neq|y|}(k) = \begin{cases} \frac{4}{16}, & k=1 \\ \frac{4}{16}, & k=2 \\ \frac{8}{16}, & k=3 \end{cases}$$



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας.

(γ) Ισχύει ότι: $E[D^2] = E[X^2 + Y^2] = E[X^2] + E[Y^2]$. Η τ.μ X^2 παίρνει τις τιμές 0,1,4 με πιθανότητες $\frac{5}{25}, \frac{10}{25}, \frac{10}{25}$ αντίστοιχα. Επομένως:

$$E[X^2] = 0 \cdot \frac{5}{25} + 1 \cdot \frac{10}{25} + 4 \cdot \frac{10}{25} = 2$$

Όμοια προκύπτει ότι $E[Y^2] = 2$. Άρα $E[D^2] = 4$

Θέμα 4 - (25 μονάδες)

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι: Y $\sim \Delta(n = 10, p = \frac{1}{5})$ (1)

(α) Δεδομένου ότι η πρώτη απάντηση είναι σωστή $(X_1 = 1)$ και η τελευταία λάθος $(X_{10} = 0)$, το γεγονός να δώσει συνολικά τρεις σωστές απαντήσεις $(Y = 3)$ είναι ισοδύναμο με το να απαντήσει σωστά σε δύο από τις οχτώ ερωτήσεις υπ' αριθμόν 2 έως 9. Η πιθανότητα αυτή είναι ίση με:

$$P(Y = 3|X_1 = 1, X_{10} = 0) = \binom{8}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 = 0.2936$$

(β) Αφού ο φοιτητής λαμβάνει 2 μονάδες για κάθε σωστή απάντηση ισχύει ότι $Z = 2Y$. Από την σχέση (1) προκύπτει ότι: $E[Y] = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$ και $var(Y) = 10 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$. Άρα, $E[Z] = 2E[Y] = 4$ και $var(Z) = 4var(Y) = 6.4$

Τελικά ο φοιτητής κατά μέσο όρο γράφει 4, που δεν του αρκεί για να επιτύχει στην εξέταση.

(γ) Σε αυτή την περίπτωση ο συνολικός βαθμός Z είναι ίσος με: $Z = 2Y - (10 - Y) = 3Y - 10$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το ερώτημα (β) προκύπτει ότι: $E[Z] = 3 - E[Y] - 10 = -4$ και $var(Z) = 9var(Y) = 14.4$

Άρα ο φοιτητής γράφει ακόμη χειρότερα σε αυτήν την περίπτωση.

Θέμα 5 - (25 μονάδες)

(α) Από την σχέση $P(X = Y) = 0.06$ και αθροίζοντας τις διαγώνιες τιμές του πίνακα προκύπτει ότι: $0.01 + 0 + 0.05 + P_{X,Y}(3,3) = 0.06 \Rightarrow P_{X,Y}(3,3) = 0$

Επίσης $P(X = 3|Y \geq 2) = \frac{P(X=3 \cap Y \geq 2)}{P(Y \geq 2)} = \frac{P_{X,Y}(3,2)+P_{X,Y}(3,3)}{P_Y(2)+P_Y(3)} = \frac{P_{X,Y}(3,2)+0}{0.3+0.25} = 0.0909 \Rightarrow P_{X,Y}(3,2) = 0.05$

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για τις περιθωριακές ς.π των X,Y εύκολα βρίσκουμε ότι: $P_X(3) = 0.3, P_{X,Y}(1,2) = 0.1, P_Y(1) = 0.3, P_{X,Y}(0,1) = 0.09, P_{X,Y}(0,3) = 0.1$

Ο πλήρης πίνακας είναι:

		Y				
		$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$p_X(x)$
	$x=0$	0.01	*0.09*	0.1	*0.1*	0.3
X	$x=1$	0	0	*0.1*	0.1	0.2
	$x=2$	0.09	0.01	0.05	0.05	0.2
	$x=3$	0.05	0.2	*0.05*	*0*	*0.3*
	$p_Y(y)$	0.15	*0.3*	0.5	0.25	

(β) $P(X > Y) = 0.09 + 0.01 + 0.05 + 0.2 + 0.05 = 0.4$

(γ) $P(X = 3|Y = 0) = \frac{P_{X,Y}(3,0)}{P_Y(0)} = \frac{0.05}{0.15} = \frac{1}{3}$

(δ) Για να είναι το Y ζυγός πρέπει να παίρνει τις τιμές $\{0, 2\}$ και για να είναι το X περιττός πρέπει να παίρνει τις τιμές $\{1, 3\}$ οπότε:
$P(Y$ζυγός$|X$περιττός$)$=$P(Y = 0, 2|X = 1, 3) = \frac{PX,Y(1,0)+P_{X,Y}(3,0)+P_{X,Y}(1,2)+P_{X,Y}(3,2)}{P_X(1)+P_X(3)} = \frac{0+0.05+0.1+0.05}{0.2+0.3} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5} = 0.4$

(ε) Ισχύει ότι: $E[Z] = 3E[X] - E[Y^2]$ (1), άρα:

$E[X] = 0 \cdot 0.3+1 \cdot 0.2+2 \cdot 0.2+3 \cdot 0.3 = 1.5$ και $E[Y^2] = 0^2 \cdot 0.15+1^2 \cdot 0.3+2^2 \cdot 0.3+3^2 \cdot 0.25 = 3.75$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις τιμές αυτές στη σχέση (1) προκύπτει ότι: $E[Z] = 0.75$