Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις 6ης Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1.
(α) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\int_{x=2}^{6}\int_{y=0}^{5} c(2x+y)dxdy &= 1\\
\int_{x=2}^{6} c\Big(2xy+\frac{y^2}{2}\Big)\Big|_0^5 dx &=\\
\int_{x=2}^{6} c\Big(10x+\frac{25}{2}\Big)dx &= 1\\
210c &= 1\\
c &= \frac{1}{210}
\end{aligned}$$

(β) Οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y γίνονται:

$$f_X(x)=\int_0^5 f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^5 \frac{2x+y}{210} = \frac{1}{210}\Big(\Big|2xy+\frac{y^2}{2}\Big|_0^5\Big) = \frac{1}{210}\Big(10\cdot x+\frac{25}{2}\Big)$$

και

$$f_Y(y)=\int_2^6 f_{X,Y}(x,y)dx = \int_2^6 \frac{2x+y}{210}dx == \frac{1}{210}\Big(2\frac{x^2}{2}+yx\Big)_2^6 = \frac{1}{210}(32+4y)$$

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(3<X<4, Y>2) = \frac{1}{210}\int_{x=3}^{4}\int_{y=2}^{5}(2x+y)dxdy = \frac{3}{20}$$

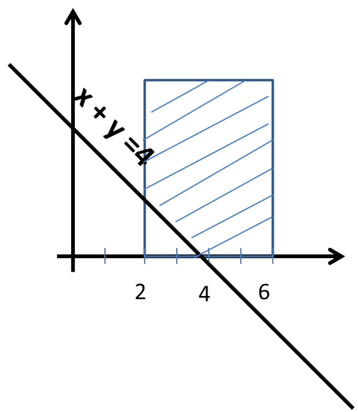
(δ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(X>3) = \frac{1}{210}\int_{x=3}^{6}\int_{y=0}^{5}(2x+y)dxdy = \frac{23}{28}$$

(ε) Η ζητούμενη πιθανότητα προκύπτει από το σχήμα **;;**

$$P(X+Y>4) = 1-P(X+Y\le 4) = 1-\frac{1}{210}\int_{x=2}^{4}\int_{y=0}^{4-x}(2x+y)dxdy = 1-\frac{2}{35} = \frac{33}{35}$$

(στ) Παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, εφόσον: $f(x,y)\neq f_1(x)f_2(y)$



Σχήμα 1: Σχήμα ασκ.1 (ε)

Άσκηση 2.

(α) Η περιθωριακή σ.π.π. της $f_{X,Y}$ για την τ.μ X γίνεται:

$$\begin{aligned} f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dy &= \int_0^1 12xy(1-x)dy = 12x(1-x)\int_0^1 ydy \\ &= 12x(1-x)\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^1 = 6\cdot\frac{12x}{2}(1-x) = 6x(1-x) \end{aligned}$$

Η περιθωριακή σ.π.π. της $f_{X,Y}$ για την τ.μ Y θα είναι:

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dx &= \int_0^1 12xy(1-x)dx = 12y\int_0^1 x\cdot(1-x)dx \\ &= \int_0^1 x - x^2dx = 12\cdot y\Big[\frac{x^2}{} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 \\ &= 12\cdot y(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) = 12\cdot y\cdot\frac{1}{6} = 2y \end{aligned}$$

(β) Για να είναι οι τ.μ X, Y ανεξάρτητες θα πρέπει να ισχύει:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \forall x, y \in (0,1)$$

Έχουμε ότι:

$$f_X(x)f_Y(y) = 6x(1-x)\cdot 2y = 12xy(1-x) = f_{X,Y}, \forall x, y \in (0,1)$$

Επομένως, οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(γ) (i) Η μέση τιμή της τ.μ X γίνεται:

$$\begin{aligned} E[X] = \int_0^1 x\cdot f_X(x)dx &= \int_0^1 x\cdot 6x(1-x)dx = 6\int_0^1 x^2(1-x)dx \\ &= 6\int_0^1 x^2 - x^3dx = 6\Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big] = 6(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Για την μέση τιμή της τ.μ Y έχουμε:

$$E[Y] = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}\Big[y^3\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

(ii) Η διασπορά της τ.μ X γίνεται:

$$var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Υπολογίζουμε τη ροπή δεύτερης τάξης $E[X^2]$ ως εξής:

$$\begin{aligned} E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot f_X(x) dx &= \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x) = 6 \cdot \int_0^1 x^3(1-x)dx = 6 \cdot \int_0^1 x^3 - x^4 \\ &= 6 \cdot \Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\Big]_0^1 = 6 \cdot \Big[\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big] = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε:

$$var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{3}{10} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{20}$$

Αντίστοιχα, η διασπορά της τ.μ Y γίνεται:

$$\begin{aligned} var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 &= \int_0^1 y^2 \cdot f_Y(y) dy - \Big(\frac{2}{3}\Big)^2 \\ &= \int_0^1 y^2 \cdot 2y dy - \frac{4}{9} \\ &= \int_0^1 2y^3 dy - \frac{4}{9} = \Big[2\frac{y^4}{4}\Big]_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{2}{4} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

(δ) Στο (β) ερώτημα δείξαμε ότι οι τ.μ X, Y είναι ανεξάρτητες. Επομένως, η συνδιασπορά τους θα είναι ίση με μηδέν, $cov(X,Y) = 0$.

Άσκηση 3.

(α) Η γραφική παράσταση της απο κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας φαίνεται στο σχήμα 2

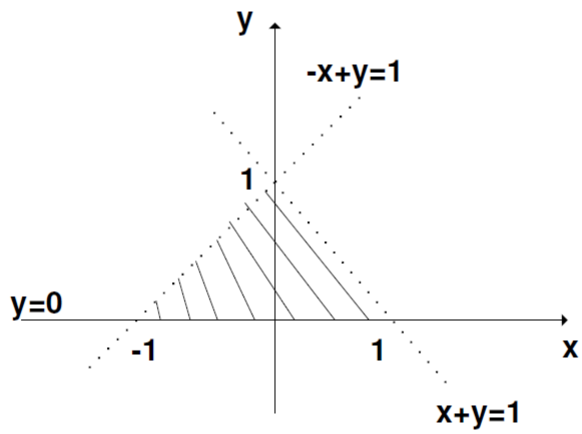
(β) Για να υπολογίσουμε τη σταθερά c,γνωρίζουμε ότι μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απο κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$$

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και το εμβαδόν του χωρίου που παριστάνεται στο σχήμα 2, και έχουμε:

$$\begin{aligned} c \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 &= 1 \Leftrightarrow \\ c &= 1 \end{aligned}$$

(γ) Οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ X και Y γίνονται:



Σχήμα 2: Σχήμα ασκ.3 (α)

- Για $-1 \leq x \leq 0$,

$$f_X(x) = \int_0^{1+x} c dy = 1 + x$$

- Για $0 \leq x \leq 1$,

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} c dy = 1 - x$$

Άρα έχουμε:

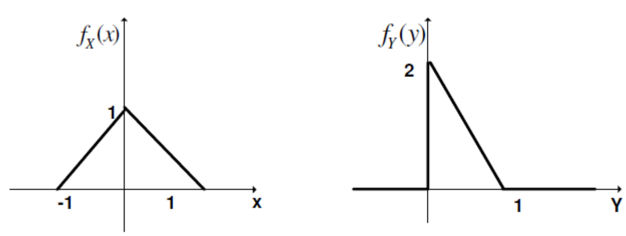
$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{αλλού} & \end{cases}$$

Ομοίως,για $0 \leq y \leq 1$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{y-1}^{1-y} c dx = 2(1-y)$$

Οπότε:

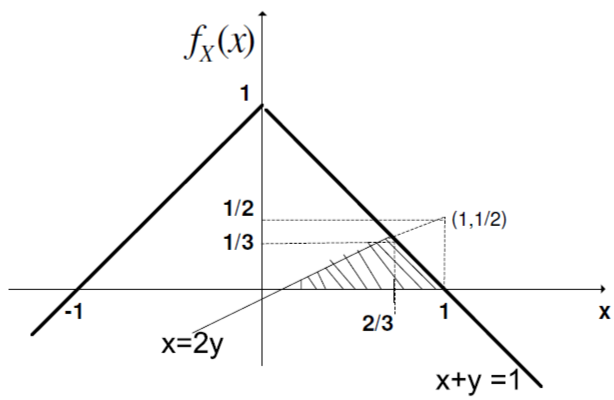
$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Σχήμα 3: Σχήμα ασκ.3 (γ)

Από το σχήμα 3 παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, εφόσον ισχύει: $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$

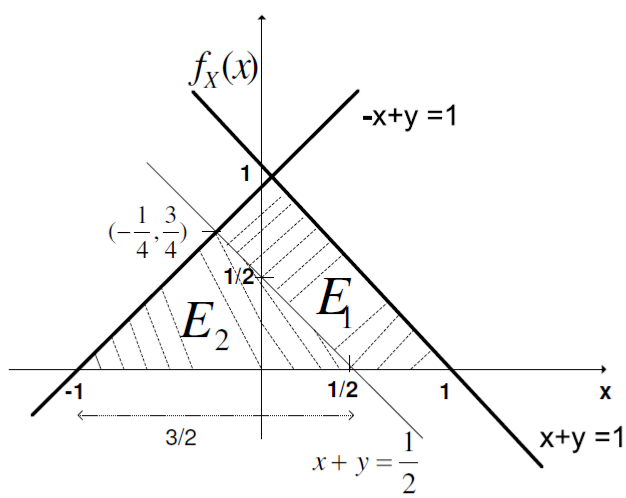
(γ) Παρατηρώντας το σχήμα 4, η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:



Σχήμα 4: Σχήμα ασκ.3 (δ)

$$P(X \geq 2Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

(δ) Από το σχήμα 5, η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:



Σχήμα 5: Σχήμα ασκ.3 (ε)

$$P(X + Y \geq \frac{1}{2}) = c \cdot E_1 = c \cdot (E - E_2) = 1 \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}) = \frac{7}{16}$$

Άσκηση 4. Έστω X και Y οι αποστάσεις των βολών του Κώστα και της Μαρίας, αντίστοιχα. Οι βολές είναι ανεξάρτητες, οπότε η κοινή τους συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα ισούται με:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{100}\frac{1}{60}e^{-\frac{y}{60}}, & 0 \leq X \leq 100, Y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θα έχουμε:

(α)

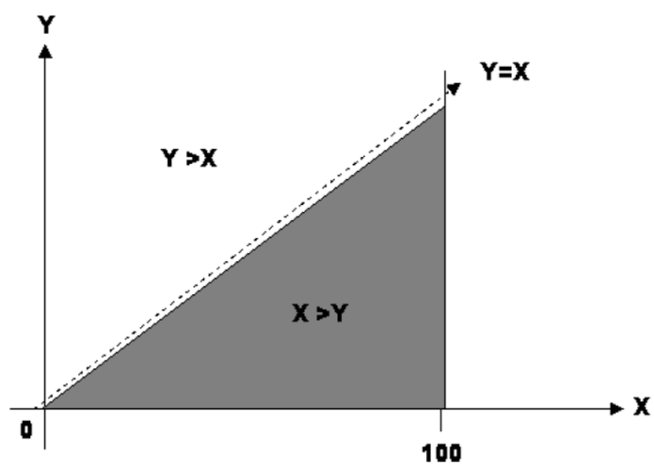
$$P(X = 75) = \int_{75}^{75} \frac{1}{100} dx = 0$$

(β)

$$P(Y > 100) = \int_{100}^{\infty} \frac{1}{60} e^{-\frac{y}{60}} dy = e^{-\frac{100}{60}} \approx 0,1889$$

(γ) Είναι: $E[X] = 50, E[Y] = 60$.

(δ) Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα $P(X > Y)$ και να την συγκρίνουμε με την πιθανότητα $P(X < Y)$. Για να το κάνουμε αυτό, εξετάζουμε το κοινό δειγματικό χώρο του σχήματος 6. Επομένως, θα έχουμε:



Σχήμα 6: Η πιθανότητα $P\left(X > Y\right)$

$$P(X > Y) = \int_0^{100} \int_0^x f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_0^{100} \int_0^x \frac{1}{100}\frac{1}{60} e^{-\frac{y}{60}} dy dx \approx 0,5133$$

Παρομοίως βρίσκουμε ότι: $P(Y > X) = 1 - P(X > Y) \approx 0,4867$. Απλώς κοιτάζοντας τις αναμενόμενες τιμές των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, θα έλεγε κανείς ότι είναι πιο πιθανό η Μαρία να ρίξει πιο μακριά. Όμως, τελικά βρήκαμε ότι η πιθανότητα ότι ο Κώστας θα ρίξει παραπάνω είναι ελαφρώς υψηλότερη.

(ε) Είναι: $f_{Y|X}(y/75) = f_Y(y)$ διότι οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες.

(στ) Έστω $W = Y - X$. Πρώτα, βρίσκουμε τη κοινή συνάρτηση κατανομής της W:

$$F_W(w) = P(W \le w) = P(Y - X \le w) = P(Y \le X + w)$$

Το γεγονός φαίνεται στο σχήμα 3.

Για $-100 \le W \le 0$ έχουμε:

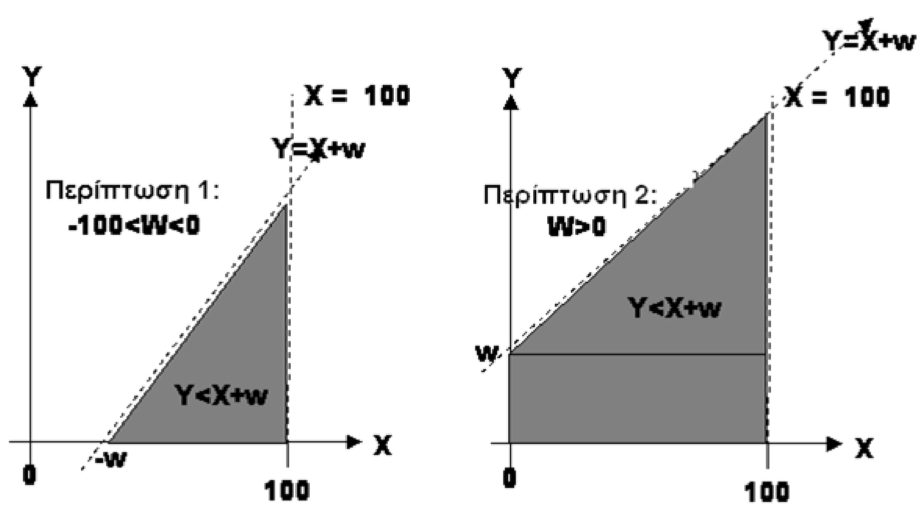
$$\begin{aligned} F_W(w) &= \int_{-w}^{100}\int_0^{x+w} f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_{-w}^{100}\int_0^{x+w} \frac{1}{100}\frac{1}{60}e^{-\frac{y}{60}}dydx \\ &= \frac{1}{100}(60\, e^{-\frac{1}{60}(w+100)} + w + 40) \end{aligned}$$

Για $W \ge 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \int_{0}^{100}\int_0^{x+w} f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_{0}^{100}\int_0^{x+w} \frac{1}{100}\frac{1}{60}e^{-\frac{y}{60}}dydx \\ &= \frac{3}{5}e^{-\frac{w}{60}}(e^{-\frac{5}{3}} - 1) + 1 \end{aligned}$$

Εν τέλει, διαφορίζοντας τις προηγούμενες εξισώσεις παίρνουμε ότι:

$$f_W(w) = \frac{d}{dw}F_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{100}(1 - e^{-\frac{1}{60}(w+100)}), & -100 \le w \le 0 \\ \frac{1}{100}e^{-\frac{w}{60}}(1 - e^{-\frac{5}{3}}), & w \ge 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Σχήμα 7: Δυο περιπτώσεις για τις τιμές της $F_W(w)$

Άσκηση 5.
Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές που μοντελοποιούν τις ώρες άφιξης των δύο φοιτητών μετά τις $8:00$ π.μ. Υποθέτοντας ότι ίσα χρονικά διαστήματα, έχουν ίσες πιθανότητες άφιξης, οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y γίνονται:

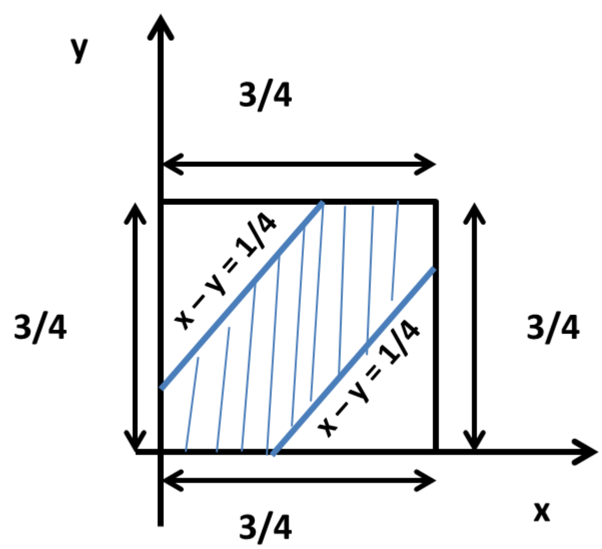
$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Όμως, οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες. Επομένως, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας γίνεται:

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εφόσον 15 λεπτά είναι το $1/4$ της ώρας, η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται από το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης περιοχής του παρακάτω σχήματος (Σχήμα ασκ.5):

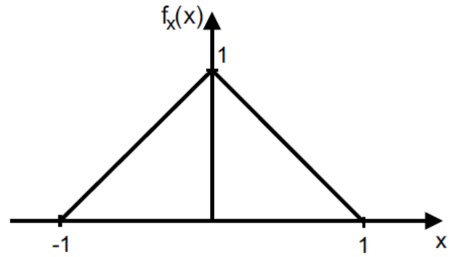


Σχήμα 8: Σχήμα ασκ.5

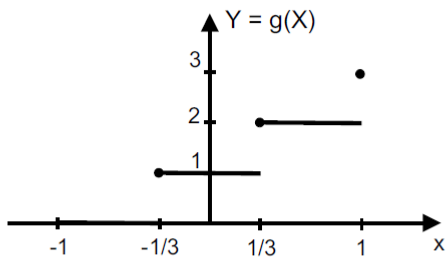
$$E = 1 - 2 \cdot E_{\text{τριγ}} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$$

Άσκηση 6. **(α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα: Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = g(X)$ φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:
(β) Η τυχαία μεταβλητή Y είναι διακριτή. Οπότε από το σχήμα 11 έχουμε:

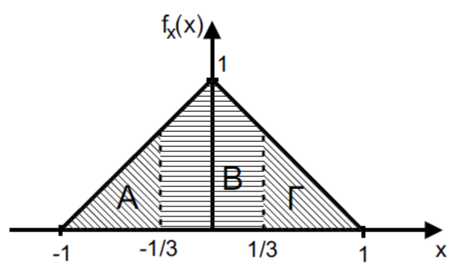
$$P(Y=0) = P(-1 \leq X \leq -\tfrac{1}{3}) = E(A) = \tfrac{2}{9}$$
$$P(Y=1) = P(-1/3 \leq X \leq \tfrac{1}{3}) = E(B) = \tfrac{5}{9}$$
$$P(Y=2) = P(1/3 \leq X \leq 1) = E(\Gamma) = \tfrac{2}{9}$$
$$P(Y=3) = 0$$



Σχήμα 9: Συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$



Σχήμα 10: Μετασχηματισμός $Y = g(X)$



Σχήμα 11: Σχήμα ασκ.6 (β)

Άσκηση 7.

(α) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X, καθώς και ο μετασχηματισμός $Y = g(X)$, φαίνονται στις επόμενες γραφικές παραστάσεις.

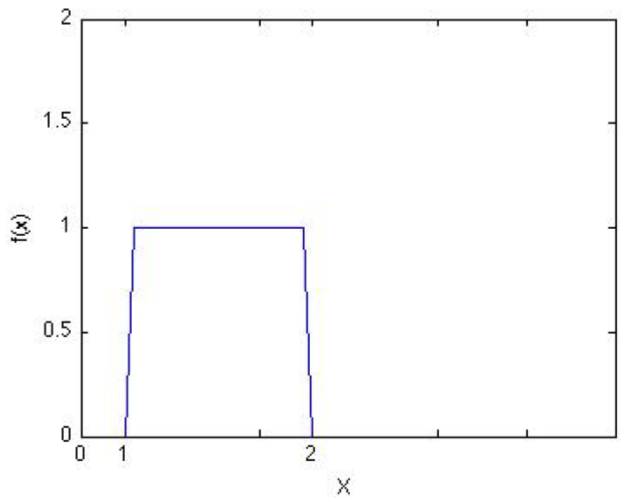
(β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι η τ.μ X παίρνει τιμές στο διάστημα $[e^{-4}, e^{-2}]$

- Για $y < e^{-4}$, έχουμε ότι $F_Y(y) = 0$

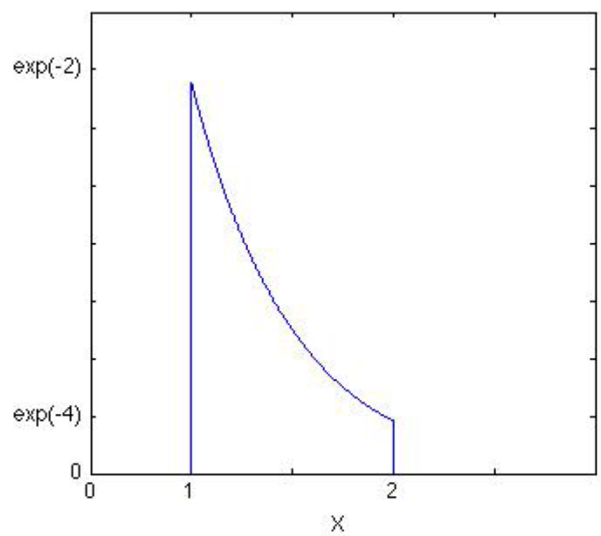
- Για $y \geq e^{-2}$, έχουμε ότι $F_Y(y) = 1$

- Για $e^{-4} \leq y \leq e^{-2}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(e^{-2X} < y) = P(-2X < lny) =$$
$$P(X > -\frac{1}{2}lny) = \int_{-\frac{1}{2}lny}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}lny}^{2} 1dx = 2 + \frac{1}{2}lny$$



Σχήμα 12: Συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$



Σχήμα 13: Μετασχηματισμός $Y = g(X)$

Οπότε έχουμε:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < e^{-4} \\ 2 + \frac{1}{2y} lny, & e^{-4} \le y \le e^{-2} \\ 1, & y \ge e^{-2} \end{cases}$$

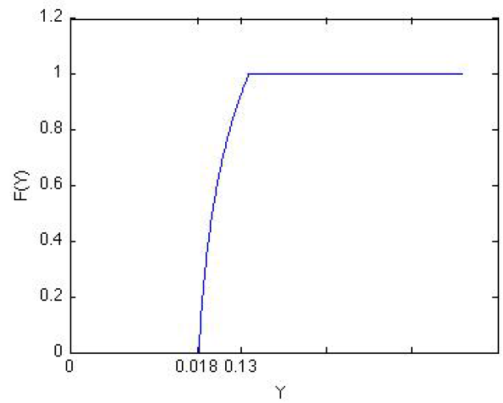
(γ) Έχουμε ότι:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & e^{-4} \le y \le e^{-2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση δίνεται στο σχήμα 14.

(δ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(Y \le e^{-3}) = F_Y(e^{-3}) = 2 + \frac{1}{2} ln(e^{-3}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$



Σχήμα 14: Συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$