Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

6η Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 6/12/2016 - Ημερομηνία Παράδοσης: 16/12/2016

Άσκηση 1.
Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X και Y με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x) = \begin{cases} c \cdot (2x + y), & 2 < x < 6, \ \ 0 < y < 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.
(β) Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y.
(γ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα: $P(3 < X < 4, Y > 2)$
(δ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα: $P(X > 3)$
(ε) Να υπολογισθεί η πιθανότητα: $P(X + Y > 4)$
(στ) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες τ.μ ;

Άσκηση 2.
Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνοτητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x) = \begin{cases} 12xy(1 - x), & 0 < x < 1, \ \ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y.
(β) Να εξετάσετε αν οι X και Y ανεξάρτητες τ.μ.
(γ) Να βρεθούν:
(i) Η μέση τιμή των τ.μ X και Y, $E[X]$ και $E[Y]$ αντίστοιχα.
(ii) Η διασπορά των τ.μ X και Y, $var[X]$ και $var[Y]$.
(δ) Ποια είναι η συνδιασπορά των τ.μ. X και Y, $cov(X, Y)$;

Άσκηση 3.
Δύο συνεχείς τ.μ X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π):

$$f_{X,Y}(x) = \begin{cases} c, & y \geq 0, \ |x| + y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Να γίνει η γραφική παράσταση της απο κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.
(β) Να υπολογισθεί η σταθερά c
(γ) Να υπολογισθούν οι περιθωριακές σ.π.π., $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των τυχαίων μεταβλητών X και Y, καθώς και να δώσετε τις γραφικές τους παραστάσεις. Είναι οι τ.μ X και Y ανεξάρτητες;
(δ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του γεγονότος: $\{X \geq 2Y\}$
(ε) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του γεγονότος: $\{X + Y \geq 1/2\}$

Άσκηση 4. Ο Κώστας και η Μαρία συναγωνίζονται ποιος από τους δύο θα ρίξει πιο μακριά το φρίσμπι. Η απόσταση X (σε μέτρα) που το ρίχνει ο Κώστας ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 100]$, ενώ η απόσταση Y που το ρίχνει η Μαρία ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1/60$.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Κώστας θα ρίξει το φρίσμπι στα 75 μέτρα;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Μαρία θα το ρίξει σε απόσταση μεγαλύτερη των 100 μέτρων;
(γ) Ποιες είναι οι μέσες αποστάσεις που το ρίχνουν ο Κώστας και η Μαρία;
(δ) Ποιος από τους δύο φίλους είναι πιο πιθανό να ρίξει πιο μακριά το φρίσμπι;
Βοήθεια:¨ Βρείτε την από κοινού σ.π.π. των X και Y. Κατόπιν, αρκεί να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X > Y)$.¨
(ε) Δεδομένου ότι ο Κώστας στέλνει το φρίσμπι στα 75 μέτρα, ποια είναι η δεσμευμένη σ.π.π. της απόστασης ρίψης της Μαρίας;
(στ) Έστω $W = Y - X$ η επιπλέον απόσταση που στέλνει το φρίσμπι η Μαρία σε σχέση με τον Κώστα. Βρείτε τη σ.π.π. της W.

Άσκηση 5.
Δύο φοιτητές συμφωνούν να συναντηθούν στην ίδια στάση του λεωφορείου μεταξύ τις 8:00 π.μ και 9:00 π.μ, ώστε να μεταβούν μαζί στο Πανεπιστήμιο, και να παρακολουθήσουν το μάθημα των Πιθανοτήτων. Ωστόσο, κάνουν την εξής συμφωνία: ¨Κανένας από τους δύο δεν θα περιμένει τον άλλο για περισσότερο από 15 λεπτά της ώρας¨. Ποια είναι η πιθανότητα να συναντηθούν στη στάση του λεωφορείου;
Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε δύο τυχαίες μεταβλητές που να μοντελοποιούν τους χρόνους άφιξης μεταξύ των 8 π.μ. και 9 π.μ των δύο φοιτητών.

Άσκηση 6. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή Y ως εξής:

$$Y = g(X) = \lfloor \frac{3(X+1)}{2} \rfloor$$

όπου $\lfloor a \rfloor$, συμβολίζει το ακέραιο μέρος του a, δηλαδή: $a = max\{m \in Z | m \leq a\}$.

(α) Να δωθούν οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X καθώς και του μετασχηματισμού $Y = g(X)$
(β) Τι είδους τυχαία μεταβλητή είναι η Y; Να υπολογίσετε την κατανομή της.

Άσκηση 7. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X, η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των τιμών 1 και 2, δηλαδή: $X \sim U[1, 2]$.
Ορίζουμε τη νέα τυχαία μεταβλητή:

$$Y = e^{-2X}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράταση του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$ καθώς και αυτή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, $f_X(x)$ της τ.μ X
(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$ της τυχαίας μεταβλητής Y και δώστε τη γραφική παράστασή της.
(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$ της Y και δώστε τη γραφική παράστασή της.
(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y \leq e^{-3})$.