Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

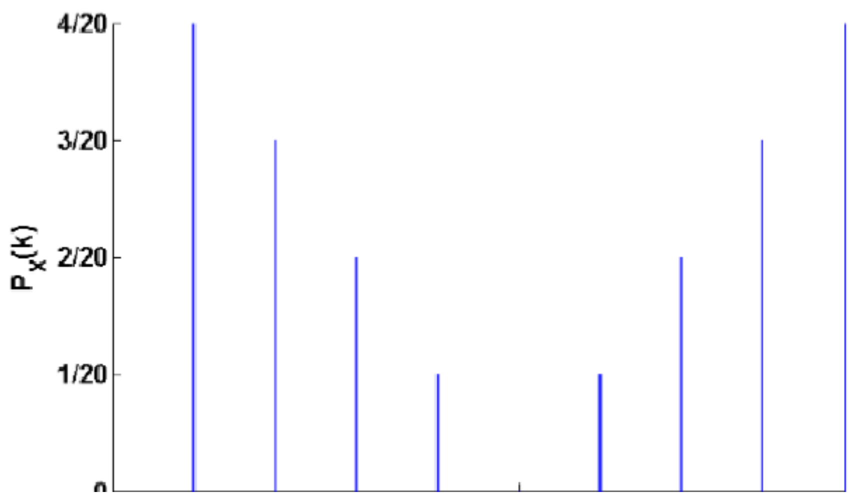
Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων-Λύσεις

Άσκηση 1.

(α) Για να είναι η $p_X(k)$ μια έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας θα πρέπει $\sum_{10-b}^{10+b} p_X(k) = 1$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{10-b}^{10+b} \tfrac{1}{20}|k-10| = 2\cdot \sum_{11}^{10+b} \tfrac{1}{20}(k-10) = 2\cdot \tfrac{1}{20} m = \tfrac{1}{10}\sum_{m=1}^{b} m, \quad [m = k-10] \\ = \tfrac{1}{10}\tfrac{b(b+1)}{2} = \tfrac{b(b+1)}{20} = 1 \\ \Rightarrow b = 4 \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $p_X(k)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η συνάρτηση πιθανότητας γίνεται:



Σχήμα 1: Γραφική παράσταση ερωτήματος (α) άσκησης 1.

$$p_X(k) = \begin{cases} 0, \; k = 10 \\ 1/20, \; k = 9 \text{ ή } 11 \\ 2/20, \; k = 8 \text{ ή } 12 \\ 3/20, \; k = 7 \text{ ή } 13 \\ 4/20, \; k = 6 \text{ ή } 14 \end{cases}$$

(β) Προφανώς λόγω συμμετρίας της $p_X(k)$ γύρω από το $k = 10$, έχουμε:

$$E[X] = 10$$

Επίσης,

$$E[X^2] = \sum_k k^2 p_X(k) = 10^2 \cdot 0 + (9^2 + 11^2) \cdot \frac{1}{20} + (8^2 + 12^2) \cdot \frac{2}{20} + (7^2 + 12^2) \cdot \frac{3}{20} + (6^2 + 14^2) \cdot \frac{4}{20} = 110$$

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 110 - 10^2 = 10$$

(γ)

$$E[Y] = E[10 \cdot (25 - X^2)] = 6250 - 500 \cdot E[X] + 10 \cdot E[X^2] = 6250 - 500 \cdot 10 + 10 \cdot 110 = 2350\, euro$$

(δ)

$$P(10 \leq X \leq 12 | 10 \leq X \leq 15) = \frac{P((10 \leq X \leq 12) \cap (10 \leq X \leq 15))}{P(10 \leq X \leq 15)} =$$
$$\frac{0+1/20+2/10}{0+1/20+2/20+3/20+4/20+0} =$$
$$\frac{3/20}{10/20} = 0.3$$

(ε)
Από τη συμμετρία της $p_X(k)$ γύρω από το $k = 10$, έχουμε ότι:

$$P(A) = 0.5 \tag{1}$$

Συνεπώς,

$$P(A^c) = 0.5 \tag{2}$$

Επίσης,

$$P(B^c) = 0.7 \tag{3}$$

Τα Α και Β είναι ανεξάρτητα, συνεπώς και τα A^c και B^c είναι ανεξάρτητα. Τελικά έχουμε:

$$P(A^c B^c) = P(A^c)P(B^c) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35 \tag{4}$$

Άσκηση 2.

(α) Το ζάρι είναι δίκαιο , οπότε κάθε αριθμός έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης: $1/6$. Επομένως:

$$p_X(8) = P(X = 8) = P(\{1\}) = \frac{1}{6} \tag{5}$$

$$p_X(5) = P(X = 5) = p(\{2, 3\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \tag{6}$$

$$p_X(-z) = P(X = -z) = p(\{4, 5, 6\}) = P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 3 * \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \tag{7}$$

(β)

Έχουμε ότι:

$$-1 = \mu_X = \sum_x x p_X(x) = 8 \cdot \tfrac{1}{6} + 5 \cdot \tfrac{2}{6} + (-z) \cdot \tfrac{3}{6} = \tfrac{18-3z}{6} \tag{8}$$

Λύνοντας ως προς z έχουμε:

$$z = \tfrac{-6-18}{-3} = 8 \tag{9}$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$E[ln(|X|)] = \sum_x (ln|x|) \cdot p_X(x) = ln8 \cdot \tfrac{1}{6} + ln5 \cdot \tfrac{1}{3} + lnz\tfrac{1}{2} = \tfrac{ln(200z^3)}{6} = 1.92 \tag{10}$$

Άσκηση 3.

(α) Προφανώς, ο Κώστας λαμβάνει πίσω 100×100 ευρώ, με πιθανότητα $1/50$ και 0 ευρώ με πιθανότητα $49/50$. Συνεπώς,

$$p_X(k) = \begin{cases} 49/50, \ x = 0 \\ 1/50, \ x = 10000 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases}$$

Η μέση τιμή θα είναι:

$$E[X] = 0 \cdot \frac{49}{50} + 10000 \cdot \frac{1}{50} = 200$$

Η ροπή δεύτερης τάξης γίνεται:

$$E[X^2] = 0^2 \cdot \frac{49}{50} + 10000^2 \cdot \frac{1}{50} = 2 \cdot 10^6$$

Επομένως, η διασπορά γίνεται:

$$var(X) = E[X^2] - (E[Q])^2 = 2 \cdot 10^6 - (200)^2 = 1960000$$

Η τυπική απόκλιση θα είναι:

$$\sigma_X = 1400, \ \text{ευρώ}$$

(β)

(i) Σε αυτή τη περίπτωση , ο Κώστας λαμβάνει πίσω $Y = 100W$ ευρώ. Η τυχαία μεταβλητή W εκφράζει το πλήθος των λαχείων που κερδίζουν (από 100 ευρώ το καθένα) και ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους: $n = 100$, $p = 1/50$, $W \approx \Delta(n = 100, p = \frac{1}{50})$.

Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή Y παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0, 100, 200, \cdots, 9800, 9900, 10000\}$ με πιθανότητα:

$$p_Y(100k) = \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^k \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{100-k}, \ \ k = 0, 1, 2, \cdots, 100 \tag{11}$$

(ii) Με τη νέα στρατηγική, η μέση τιμή γίνεται:

$$E[Y] = 100 \cdot E[W] = 100np = 100 \times 100 \times \frac{1}{50} = 200$$

Η διασπορά γίνεται:

$$var(Y) = var(100W) = 10^4 var(W) = 10^4 np(1-p) = 10^4 \cdot 100 \cdot (1/50) \cdot (49/50) = 196000 \quad (12)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε την ίδια τυπική απόκλιση, $\sigma_Y = 140$ ευρώ. Και οι δύο στρατηγικές δίνουν το ίδιο μέσο κέρδος, αλλά η δεύτερη στρατηγική έχει 10 φορές μικρότερη τυπική απόκλιση.

Άσκηση 4.
(α) Πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} p(x,y) = 1$$

Συνεπώς,

$$1 = \textstyle\sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} c(x+y) = c\Big(\sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} x + \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{3} y \Big) =$$
$$c\Big(3 \textstyle\sum_{x=1}^{2} x + 2 \sum_{y=1}^{3} y \Big) = c(3 \cdot 3 + 2 \cdot 6) = 21c \Leftrightarrow$$
$$c = \tfrac{1}{21}$$

(β) Έχουμε ότι

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^{3} p(x,y) = \frac{1}{21} \sum_{y=1}^{3} (x+y) = \frac{3x+6}{21}, \quad x = 1, 2, \cdots$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^{2} p(x,y) = \frac{1}{21} \sum_{x=1}^{2} y(x+y) = \frac{3+2y}{21}, \quad y = 1, 2, 3 \cdots$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$p(1,1) = \frac{1+1}{21} = \frac{2}{21}$$

$$p_X(1) \cdot p_Y(1) = \frac{9}{21} \cdot \frac{5}{21} = \frac{5}{49}$$

Επομένως, οι τυχαίες μεταβλητές X, Y δεν ειναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 5.

(α) Από την έκφραση της από κοινού συνάρτηση πιθανότητας βλέπουμε ότι υπάρχουν 9 (x, y) υποψήφια ζεύγη με μη μηδενική πιθανότητα. Τα ζεύγη αυτά είναι τα $(1,1), (1,2), (1,3), (4,1), (4,2),$ $(4,3), (6,1), (6,2)$ και $(6,3)$. Η πιθανότητα ενός ζεύγους είναι ανάλογη του κλάσματος y/x των συντεταγμένων του ζεύγους. Καθώς η πιθανότητα του δειγματοχώρου ισούται με 1, ισχύει:

$$\frac{1}{1}c + \frac{2}{1}c + \frac{3}{1}c + \frac{1}{4}c + \frac{2}{4}c + \frac{3}{4}c + \frac{1}{6}c + \frac{2}{6}c + \frac{3}{6}c = 1.$$

Λύνοντας ως προς c, έχουμε $c = \dfrac{2}{17}$.

(β) Υπάρχουν 3 σημεία για τα οποία ισχύει $2Y < X$.

$$P(2Y < X) = P(\{(4,1)\}) + P(\{(6,1)\}) + P(\{(6,2)\}) = \frac{2}{17}(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}) = \frac{3}{34}.$$

(γ) Υπάρχουν 4 σημεία για τα οποία ισχύει $2Y > X$.

$$P(2Y > X) = P(\{(1,1)\}) + P(\{(1,2)\}) + P(\{(1,3)\}) + P(\{(4,3)\}) = \frac{2}{17}(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{3}{4}) = \frac{27}{34}.$$

(δ) Υπάρχουν 2 σημεία για τα οποία ισχύει $2Y = X$.

$$P(2Y = X) = P(\{(4,2)\}) + P(\{(6,3)\}) = \frac{2}{17}(\frac{2}{4} + \frac{3}{6}) = \frac{2}{17}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$P(2Y < X) + P(2Y > X) + P(2Y = X) = \frac{3}{34} + \frac{27}{34} + \frac{2}{17} = 1,$$

όπως θα περιμέναμε.

(ε) Για 2 διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$, έχουμε:

$$p_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) \quad \text{και} \quad p_Y(y) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y).$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα ο αριθμός των πιθανών ζεύγων (X, Y) είναι αρκετά μικρός, άρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τις περιθωριακές ΣΠ αριθμητικά. Για παράδειγμα,

$$p_X(4) = P(\{(4,1)\}) + P(\{(4,2)\}) + P(\{(4,3)\}) = \frac{6}{34}.$$

Συνολικά έχουμε:

$$p_X(x) = \begin{cases} 12/17, & x = 1, \\ 3/17, & x = 4, \\ 2/17, & x = 6, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/6, & y = 1 \\ 1/3, & y = 2, \\ 1/2, & y = 3, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(στ) Η μέση τιμή μιας τυχαίας διακριτής μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$E[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x p_X(x).$$

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε,

$$E[X] = 1 \cdot \frac{12}{17} + 4 \cdot \frac{3}{17} + 6 \cdot \frac{2}{17} = \frac{36}{17}$$

και

$$E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3}.$$

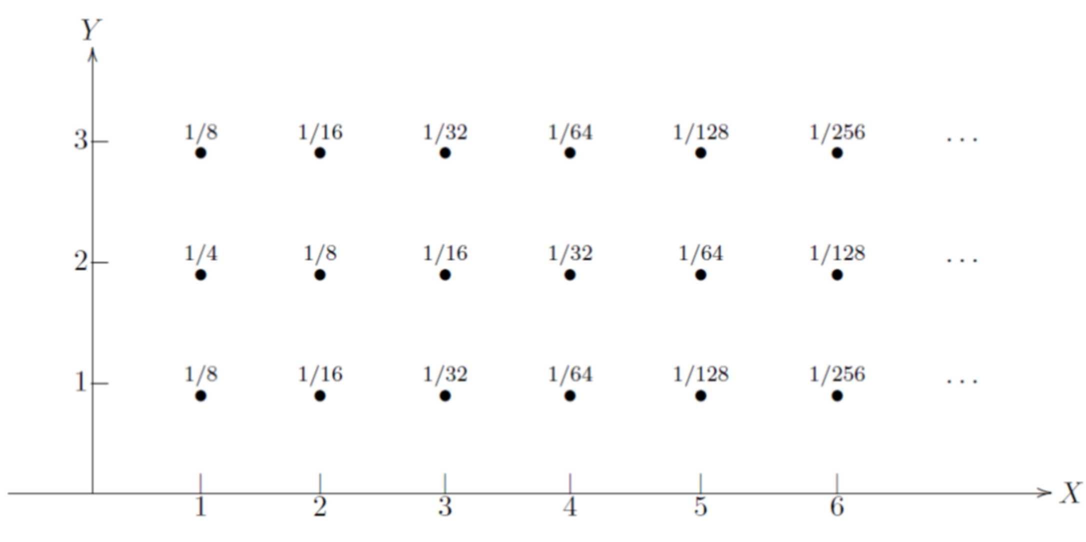
(ζ) Η διασπορά μιας τυχαίας διακριτής μεταβλητής X υπολογίζεται από τον $E[X^2] - (E[X])^2$ ή από τον $E[(X - E[X])^2]$. Εφαρμόζοντας το δεύτερο τύπο ισχύει,

$$var(X) = (1 - \frac{36}{17})^2 \cdot \frac{12}{17} + (4 - \frac{36}{17})^2 \cdot \frac{3}{17} + (6 - \frac{36}{17})^2 \cdot \frac{2}{17} = \frac{948}{289}$$

$$var(Y) = (1 - \frac{7}{3})^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - \frac{7}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} + (3 - \frac{7}{3})^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}.$$

Άσκηση 6.

(α) Η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα Έχουμε ότι:



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση ερωτήματος (α) άσκησης 6.

- $0 < P_{X,Y}(x,y) < 1, \forall (x,y)$

- Έχουμε:

$$\sum_{x=1}^{+\infty} \sum_{y=1}^{3} P_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=1}^{+\infty} \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^x + \sum_{x=1}^{+\infty} \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{1}{2})^x + \sum_{x=1}^{+\infty} \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^x =$$
$$\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1/2}{1-1/2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1/2}{1-1/2} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1/2}{1-1/2} =$$
$$\tfrac{1}{4} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{4} \cdot 1 = 1$$

Επομένως, η $P_{X,Y}(x,y)$ είναι έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.
(β) Ισχύουν τα εξής:

$$P_X(x) = \sum_{y=1}^{3} P_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2})^x + \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^x + \frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{2})^x$$

Επίσης,

$$P_U(y) = \sum_{x=1}^{+\infty} P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2})^x, \ y = 1,3 \\ \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^x, \ y = 2 \end{cases}$$

Επομένως,

$$P_U(y) = \sum_{x=1}^{+\infty} P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4}\cdot\frac{1/2}{1-1/2}, \ y = 1,3 \\ \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1/2}{1-1/2}, \ y = 2 \end{cases} = \begin{cases} 1/4, \ y = 1,3 \\ 1/2, \ y = 2 \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)\cdot P_Y(y)$, συνεπώς οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες.
(γ) Η γεωμετρική συνάρτηση κατανομής, έχει συνάρτηση πιθανότητας:

$$P_X(k) = (1-p)^{k-1}\cdot p, \ k = 1,2,3,\cdots$$

Άρα είναι προφανές ότι η τυχαία μεταβλητή X του προβλήματος, είναι γεωμετρική με παράμετρο $p = 1/2$.
Επομένως, $E[X] = \frac{1}{p} = 2$, και $var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-1/2}{1/4} = 2$
(δ) Θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις $E[Y], E[Y^2], E[Y^4]$

$$\begin{aligned} E[Y] &= 1^1\cdot\tfrac{1}{4} + 3^1\cdot\tfrac{1}{4} + 2^1\cdot\tfrac{1}{2} = 2 \\ E[Y^2] &= 1^2\cdot\tfrac{1}{4} + 3^2\cdot\tfrac{1}{4} + 2^2\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{9}{2} \\ E[Y^4] &= 1^4\cdot\tfrac{1}{4} + 3^4\cdot\tfrac{1}{4} + 2^4\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{57}{2} \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε:

$$E[Z] = E[2X + Y^2] = 2E[X] + E[Y^2] = 2\cdot 2 + \tfrac{9}{2} = \tfrac{17}{2}$$

και

$$\begin{aligned} var[Z] = var[2X + Y^2] &= var[2X] + var[Y^2] \\ &= 4\cdot var(X) + var(Y^2) \\ = 4\cdot var(X) + E[Y^2] - E^2(Y^2) &= 4\cdot 2 + \tfrac{57}{2} - \tfrac{81}{4} = \tfrac{65}{4} \end{aligned}$$

(ε) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P_{Z|X}(z|X=1) &= P(\{Z = z\}|\{X = 1\}) \\ &= P(\{2X + Y^2 = z\}|\{X = 1\}) = P(\{2 + Y^2 = z\}) \\ &= \begin{cases} 1/4, \ z = 3,11 \\ 1/2, \ z = 6 \end{cases} \end{aligned}$$