Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 3/11/2016 - Ημερομηνία Παράδοσης: 10/11/2016

Άσκηση 1.
Η μέση ημερήσια θερμοκρασία στην Αθήνα κατά τον μήνα Φεβρουάριο, μετρούμενη σε ακέραιους βαθμούς Κελσίου είναι μια τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{20}|k-10|, & 10-b \leq k \leq 10+b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Να Υπολογίσετε τη σταθερά b και δώστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας της X.
Σημείωση! Παρατηρήστε τη συμμετρία της συνάρτησης πιθανότητας της X.
Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα: $\sum_{i=1}^{b} i = \frac{b(b+1)}{2}$

(β) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή $E[X]$ και ποια η διασπορά $var(X)$ της τ.μ X;

(γ) Το κόστος σε ευρώ της θέρμανσης ενός σπιτιού κατά το μήνα Φεβρουάριο είναι: $Y = 10(25-X)^2$. Να υπολογισθεί το μέσο κόστος $E[Y]$.

(δ) Να βρεθεί η δεσμευμένη πιθανότητα: $P(10 \leq X \leq 12 \Big| 10 \leq X \leq 15)$

(ε) Ορίζονται τα εξής γεγονότα:
$A = \{$Η μέση ημερήσια θερμοκρασία είναι $X \leq 10\}$
$B = \{$Υπάρχουν τουλάχιστον 12 συννεφιασμένες μέρες μέσα στο Φεβρουάριο$\}$
Έστω ότι τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα και ισχύει: $P(B) = 0.3$. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(A^c \cap B^c)$

Άσκηση 2.
Παίζετε το εξής παιχνίδι: Ρίχνετε ένα δίκαιο εξάεδρο ζάρι. Αν έρθει 1, κερδίζετε 8 ευρώ. Αν έρθει 2 ή 3 κερδίζετε 5 ευρώ. Αν έρθει $4, 5$ ή 6 χάνετε z ευρώ. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως το ποσό που κερδίζετε (αρνητικές τιμές για την X δηλώνουν ποσό που χάνετε).

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, $p_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X.

(β) Υπολογίστε τη τιμή z για την οποία το μέσο κέρδος είναι ίσο με -1, δηλαδή $\mu_X = -1$.

(γ) Για την τιμή της σταθεράς z που βρήκατε στο (β), υπολογίστε τη μέση τιμή $E[ln(|X|)]$.

Άσκηση 3.
Ο φίλος σας ο Κώστας είναι φανατικός τζογαδόρος, οποίος όμως δεν έχει παρακολουθήσει το $HY-217$. Ακούει ότι ένα καζίνο στο $Vegas$ προσφέρει λαχεία. Κάθε λαχείο κερδίζει με πιθανότητα $p = 1/50$. Ένα λαχείο μπορεί να αγοραστεί ¨επενδύοντας¨ το ποσό των C δολαρίων. Αν κληρωθεί το λαχείο, ο παίκτης κερδίζει 100 φορές την ¨επένδυσή¨ του: $X = 100C$ ευρώ. Αν δεν κληρωθεί, ο παίκτης λαμβάνει πίσω $X = 0$ ευρώ, δηλαδή χάνει όλη την αρχική του ¨επένδυση¨.

(α) Ο Κώστας θέλει να ποντάρει όλες τις οικονομίες τους (100 δολάρια) αγοράζοντας ένα και μοναδικό λαχείο για $C = 100$ δολάρια. Έστω X το ποσό που κερδίζει.
(i) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.
(ii) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[X]$, και την τυπική απόκλιση σ_X του κέρδους.

(β) Καθώς έχετε παρακολουθήσει το $HY - 217$, συμβουλεύετε το φίλο σας να ακολουθήσει διαφορετική στρατηγική με τα χρήματά του: Αντί να αγοράσει 1 λαχείο για $C = 100$ δολάρια, να αγοράσει $n = 100$ λαχεία το καθένα με $C = 1$ δολάριο. Έστω Y το ποσό που κερδίζει ο Κώστας ακολουθώντας τη δική σας στρατηγική.
(i) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y.
(ii) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[Y]$, και την τυπική απόκλιση σ_Y του κέρδους.
Είναι πράγματι καλύτερη η στρατηγική σας; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 4.

Έστω η τυχαία μεταβλητή X με πεδίο τιμών $\{1, 2\}$, και η τυχαία μεταβλητή Y με πεδίο τιμών $\{1, 2, 3\}$. Υποθέστε ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τις τυχαίες μεταβλητές (X, Y) δίνεται από τη σχέση:

$$p(x, y) = c(x + y), \quad \text{όπου}, \quad x \in \{1, 2\},\ y \in \{1, 2, 3\},$$

και c θετική σταθερά.

(α) Να υπολογισθεί η τιμή της σταθεράς c.

(β) Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας για τις τυχαίες μεταβλητές X και Y, $p_X(x)$, $p_Y(y)$.
(γ) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 5.

Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{cy}{x}, & x \in \{1, 4, 6\} \text{ και } y \in \{1, 2, 3\} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Να υπολογισθεί η τιμή της σταθεράς c.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y < X)$

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y > X)$

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y = X)$

(ε) Υπολογίστε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας, $p_X(x)$ και $p_Y(y)$

(στ) Υπολογίστε τις μέσες τιμές $E[X]$ και $E[Y]$.

(ζ) Υπολογίστε τις διασπορές, $var(X)$ και $var(Y)$.

Άσκηση 6.
Θεωρείστε την ακόλουθη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x, & x = 1,2,3,\cdots \text{ και } y = 1,3 \\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x, & x = 1,2,3,\cdots \text{ και } y = 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της $p_{X,Y}(x,y)$. Δείξτε ότι $p_{X,Y}(x,y)$ είναι μια έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.

(β) Υπολογίστε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας, $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ X και Y αντίστοιχα. Είναι οι X και Y ανεξάρτητες;

(γ) Αναγνωρίστε το όνομα της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X και την παράμετρο αυτής. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά της, $var(X)$.

(δ) Έστω $Z = 2X + Y^2$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, και τη διασπορά, $var(Z)$, της τ.μ. Z.

(ε) Υπολογίστε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας: $p_{Z|X}(z/x = 1)$