ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2016-2017**
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

Φροντιστήριο 9
Επιμέλεια: Γιαννόπουλος Μιχάλης

**Άσκηση 1**
Έστω $X$ συνεχής Τ.Μ. με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{1}{3}(x+2) & -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{3} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}(-x+2) & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

(i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.

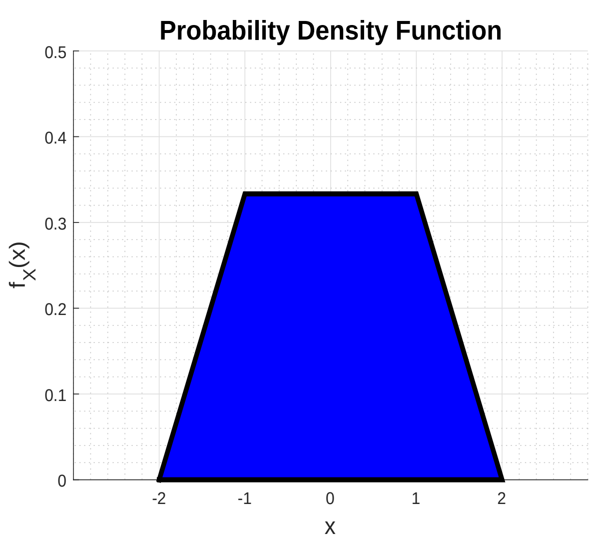
(ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2)$.

(iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2)$.

(iv) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$.

**Λύση**

(i) Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (*περιορισμένη* στο διάστημα $[-2, 2]$) που φαίνεται στο Σχήμα 1.




Σχήμα 1: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

**Παρατήρηση:** Η $f_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} f_X(x)dx + \int_{-2}^{2} f_X(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f_X(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{2} f_X(x)dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = \int_{-2}^{2} f_X(x)dx = \frac{(4+2)\cdot\frac{1}{3}}{2} = \frac{6\cdot\frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

, όπου το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$ υπολογίστηκε ως το εμβαδόν μεταξύ του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου στο Σχήμα 1 και του άξονα x'x. Εναλλακτικά, θα μπορούσε να υπολογιστεί με χρήση τεχνικών ολοκλήρωσης ως εξής:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} f_X(x)dx + \int_{-2}^{-1} f_X(x)dx + \int_{-1}^{1} f_X(x)dx + \int_{1}^{2} f_X(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f_X(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(x+2)dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{3}(-x+2)dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx$$
$$= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(x+2)dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{3}(-x+2)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \frac{2}{3}\left[x\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{3}\left[x\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} + \frac{2}{3}\left[x\right]_{1}^{2}$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2}-2) + \frac{2}{3}(-1+2) + \frac{1}{3}(1+1) - \frac{1}{3}(2-\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}(2-1)$$
$$= \frac{1}{3}(-\frac{3}{2}) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(\frac{3}{2}) + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{6}{3} - \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1$$

(ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2) = \int_{\frac{3}{2}}^{2} f_X(x)dx = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{3}(-x+2)dx = -\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{3}{2}}^{2} + \frac{2}{3}\left[x\right]_{\frac{3}{2}}^{2}$$
$$= -\frac{1}{3}(2-\frac{9}{8}) + \frac{2}{3}(2-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{3}(\frac{7}{8}) + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

(iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2 \mid 0 \leq X \leq 2) = \frac{P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2, 0 \leq X \leq 2)}{P(0 \leq X \leq 2)} = \frac{P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2)}{P(0 \leq X \leq 2)} = \frac{\int_{\frac{3}{2}}^{2} f_X(x)dx}{\int_{0}^{2} f_X(x)dx}$$
$$= \frac{\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{3}(-x+2)dx}{\int_{0}^{1} \frac{1}{3}dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{3}(-x+2)dx} = \frac{-\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{3}{2}}^{2} + \frac{2}{3}\left[x\right]_{\frac{3}{2}}^{2}}{\frac{1}{3}\left[x\right]_{0}^{1} + \left(-\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} + \frac{2}{3}\left[x\right]_{1}^{2}\right)} = \frac{-\frac{7}{24} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

(iv) Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < -2 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

(b) Για $-2 \leq x < -1 \Leftrightarrow$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{x} \frac{1}{3}(t+2)dt = \int_{-2}^{x} \frac{1}{3}(t+2)dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{x} + \frac{2}{3}\left[t\right]_{-2}^{x}$$
$$= \frac{x^2}{6} - \frac{4}{6} + \frac{2x}{3} - (\frac{-4}{3}) = \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{4}{3} = \frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}(x^2+4x+4) = \frac{1}{6}(x+2)^2$$

(c) Για $-1 \leq x < 1 \Leftrightarrow$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(t+2)dt + \int_{-1}^{x} \frac{1}{3}dt = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(t+2)dt + \int_{-1}^{x} \frac{1}{3}dt$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \frac{2}{3}\left[t\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{3}\left[t\right]_{-1}^{x} = (\frac{1}{6} - \frac{4}{6}) + (\frac{-2}{3} + \frac{4}{3}) + (\frac{x}{3} + \frac{1}{3}) = -\frac{3}{6} + \frac{x}{3} + 1 = \frac{x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(2x+3)$$

(d) Για $1 \leq x < 2 \Leftrightarrow$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(t+2)dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{3}(-t+2)dt$$
$$= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(t+2)dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{3}(-t+2)dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \frac{2}{3}\left[t\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{3}\left[t\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1}^{x} + \frac{2}{3}\left[t\right]_{1}^{x}$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - 2) + \frac{2}{3}(-1+2) + \frac{1}{3}(1+1) - \frac{1}{3}(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{2}{3}(x-1) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}$$
$$= -\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} + \frac{2}{6} = -\frac{x^2}{6} - \frac{-4x}{6} - \frac{-2}{6} = -\frac{1}{6}(x^2 - 4x - 2)$$

(e) Για $x \geq 2 \Leftrightarrow$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(t+2)dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}dt + \int_{1}^{2} \frac{1}{3}(-t+2)dt + \int_{2}^{+\infty} 0dt$$
$$= \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3}(t+2)dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}dt + \int_{1}^{2} \frac{1}{3}(-t+2)dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \frac{2}{3}\left[t\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{3}\left[t\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1}^{2} + \frac{2}{3}\left[t\right]_{1}^{2}$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - 2) + \frac{2}{3}(-1+2) + \frac{1}{3}(1+1) - \frac{1}{3}(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{2}{3}(2-1) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{2} = 2 - 1 = 1$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{1}{6}(x+2)^2 & -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{6}(2x+3) & -1 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{6}(x^2 - 4x - 2) & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

**Άσκηση 2**

Έστω ότι η διάρκεια ζωής σε χρόνια μίας οθόνης Η/Υ μοντελοποιείται ως μία συνεχής Τ.Μ. $X$, με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας PDF που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} & x \geq 0 \end{cases}$$

(i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.

(ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

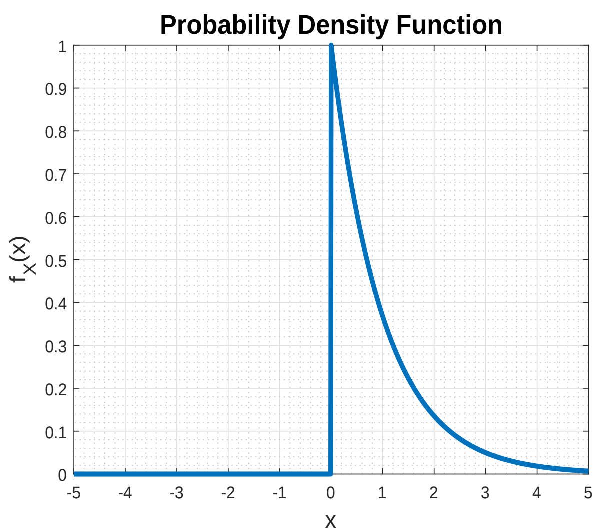
(iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(1 \leq X \leq 2)$.

(iv) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.

(v) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \geq 1)$.

**Λύση**

(i) Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (*περιορισμένη* στο διάστημα $[-5, 5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 2.




Σχήμα 2: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

(ii) Η $f_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}dx \\ &= \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}dx = -\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\right]_0^{+\infty} = -(0-1) = 1\end{aligned}$$

(iii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f_X(x)dx = \int_1^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}dx = -\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\right]_1^2 = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}$$

(iv) Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

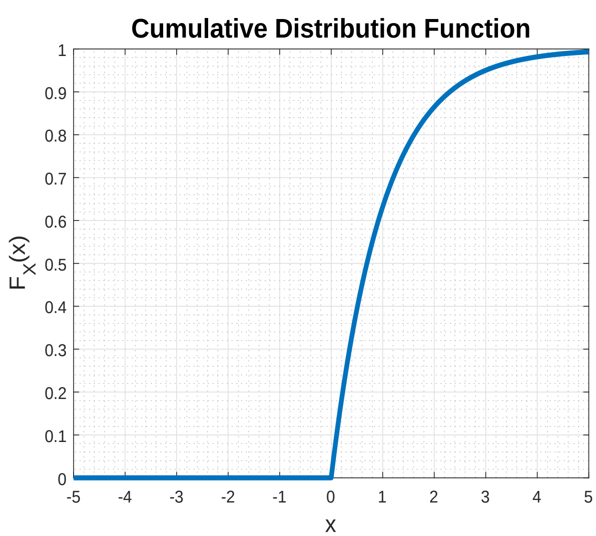
(b) Για $x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt + \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}dt \\ &= \int_0^x \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}dt = -\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\right]_0^x = -(\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} - \mathrm{e}^{0}) = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} & x \geq 0 \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $F_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (*περιορισμένη* στο διάστημα $[-5, 5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 3.




Σχήμα 3: Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_X(x)$.

(v) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(X \geq 1) = \int_1^{+\infty} f_X(x)dx = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}dx = -\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\right]_1^{+\infty} = \mathrm{e}^{-1}$$

**Άσκηση 3**

Ένας μεγιστάνας θα ζήσει ακόμα ένα χρονικό διάστημα σε έτη, το οποίο μοντελοποιείται ως μία συνεχής Τ.Μ. $X$ με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας PDF που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} -2x+2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ο μεγιστάνας παντρεύεται μια νεαρή ηθοποιό, και συνάπτουν προγαμιαίο συμβόλαιο που προβλέπει πως όταν αυτός πεθάνει η ηθοποιός θα εισπράξει κληρονομιά (σε εκατομμύρια ευρώ) που μοντελοποιείται ως Τ.Μ. $Y$ που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$Y = 10 \cdot X + 2$$

(i) Να υπολογιστεί το μέσο διάστημα ζωής που απομένει ακόμα στον μεγιστάνα πριν πεθάνει.

(ii) Να υπολογιστεί η διασπορά της Τ.Μ. $X$, $VAR[X]$.

(iii) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της κληρονομιάς (σε εκατομμύρια ευρώ) που θα εισπράξει η ηθοποιός, όταν ο μεγιστάνας πεθάνει.

**Λύση**

(i) Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, ζητείται να υπολογιστεί η μέση τιμή της Τ.Μ. $X$, $E[X]$. Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x f_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot (-2x+2)dx = \int_0^1 (-2x^2+2x)dx$$
$$= -2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2\right]_0^1 = -2(\frac{1}{3}-0) + (1-0) = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

(ii) Για τον υπολογισμό της διασποράς της Τ.Μ. $X$, $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Για τον υπολογισμό της ροπής $2^{ας}$ τάξεως, $E[X^2]$, έχουμε:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot (-2x+2)dx = \int_0^1 (-2x^3+2x^2)dx$$
$$= -2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -2(\frac{1}{4}-0) + 2(\frac{1}{3}-0) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

Άρα, η διασπορά της Τ.Μ. $X$, $VAR[X]$ θα είναι τελικά:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{6} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

(iii) Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, ζητείται να υπολογιστεί η μέση τιμή της Τ.Μ. $Y$, $E[Y]$. Εκμεταλλευόμενοι την γραμμική σχέση που συνδέει τις Τ.Μ. $X$ και $Y$ (και κάνοντας χρήση της αντίστοιχης ιδιότητας), έχουμε:

$$E[Y] = E[10 \cdot X + 2] = 10 \cdot E[X] + 2 = 10 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{16}{3} \approx 5.333$$

**Άσκηση 4**

Έστω συνεχής Τ.Μ. $X$, με Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} c - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

, όπου $c$ σταθερά με $c \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστούν:

(i) Η σταθερά $c$.

(ii) Η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) της Τ.Μ. $X$, $f_X(x)$.

(iii) Η μέση τιμή της Τ.Μ. $X$, $E[X]$.

**Λύση**

**Παρατήρηση:** Στην περίπτωση που δίνεται η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής μίας Τ.Μ. $X$, και όχι η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας αυτής, η Συνθήκη Κανονικοποίησης λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 \end{cases}$$

(i) Σύμφωνα με την θεωρία, θα πρέπει να ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης. Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (c - \frac{4}{x^2}) = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$$

Άρα, τελικά, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF) θα δίνεται από τον τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{4}{x^2} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

(ii) Με γνωστή την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

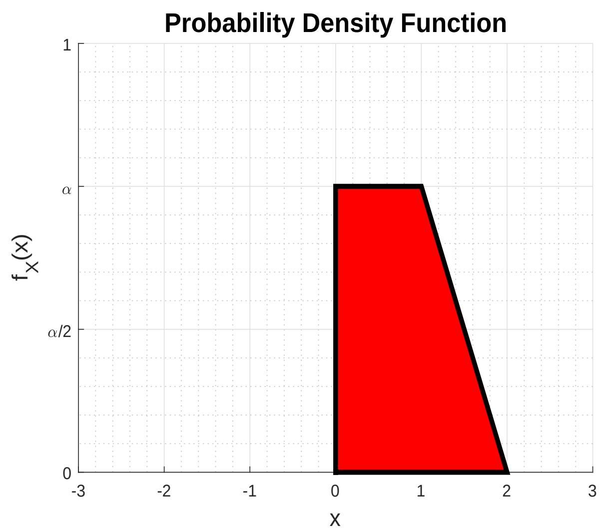
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

(iii) Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{2}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{2}^{+\infty} x \cdot (\frac{8}{x^3})dx$$
$$= \int_{2}^{+\infty} \frac{8}{x^2}dx = 8\Big[-\frac{1}{x}\Big]_2^{+\infty} = 8(0+\frac{1}{2}) = \frac{8}{2} = 4$$

**Άσκηση 5**

Έστω συνεχής Τ.Μ. $X$, με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) η γραφική παράσταση της οποίας (*περιορισμένη* στο διάστημα $[-3, 3]$) φαίνεται στο Σχήμα 4.




Σχήμα 4: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

, όπου $\alpha$ σταθερά με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστούν:

(i) Η σταθερά $\alpha$.

(ii) Η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$.

(iii) Η μέση τιμή της Τ.Μ. $X$, $E[X]$.

(iv) Η διασπορά της Τ.Μ. $X$, $VAR[X]$.

**Λύση**

(i) Αρχικά, προσδιορίζουμε τον τύπο της Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, με βάση το Σχήμα 4. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha & 0 \leq x \leq 1 \\ c \cdot x + d & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

**Παρατήρηση:** Η $f_X(x)$, εκτός από την προσδιοριστέα σταθερά $\alpha$, εκφράζεται επιπλέον συναρτήσει των παραμέτρων $c$, $d$. Ως εκ τούτου, οι παράμετροι $c$, $d$ θα πρέπει να εκφραστούν συναρτήσει της σταθεράς $\alpha$, με βάση του τύπο της $f_X(x)$.

Με βάση το Σχήμα 4, παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} f_X(1) = \alpha \Rightarrow c + d = \alpha \\ f_X(2) = 0 \Rightarrow 2 \cdot c + d = 0 \end{cases}$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα $c$, $d$, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{cases} c = -\alpha \\ d = 2\alpha \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τα $c$, $d$, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha & 0 \leq x \leq 1 \\ -\alpha x + 2\alpha & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Για να είναι η $f_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int_{0}^{1} f_X(x)dx + \int_{1}^{2} f_X(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$
$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} \alpha dx + \int_{1}^{2} (-\alpha x + 2\alpha)dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \Big[x\Big]_0^1 - \alpha \cdot \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^2 + 2\alpha \cdot \Big[x\Big]_1^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \alpha \cdot (1-0) - \alpha \cdot (2 - \frac{1}{2}) + 2\alpha \cdot (2-1) = 1 \Leftrightarrow \alpha - \frac{3\alpha}{2} + 2\alpha = 1 \Leftrightarrow 3\alpha - \frac{3\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$$

**Παρατήρηση:** Η προσδιοριστέα σταθερά $\alpha$ θα μπορούσε να υπολογιστεί εναλλακτικά, απαιτώντας το εμβαδόν μεταξύ της $f_X(x)$ και του άξονα $x'x$ να ισούται με 1:

$$E_{\text{Τραπεζίου}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(2+1)\cdot\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

(ii) Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

(b) Για $0 \leq x < 1 \Leftrightarrow$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{2}{3}dt = \int_{0}^{x} \frac{2}{3}dt = \frac{2}{3}\Big[t\Big]_0^x = \frac{2x}{3}$$

(c) Για $1 \leq x < 2 \Leftrightarrow$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} \frac{2}{3}dt + \int_{1}^{x} (-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3})dt = \int_{0}^{1} \frac{2}{3}dt + \int_{1}^{x} (-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3})dt$$
$$= \frac{2}{3}\Big[t\Big]_0^1 - \frac{2}{3}\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_1^x + \frac{4}{3}\Big[t\Big]_1^x = \frac{2}{3}(1-0) - \frac{2}{3}(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{4}{3}(x-1)$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4x}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(-x^2 + 4x - 1) = -\frac{1}{3}(x^2 - 4x + 1)$$

(d) Για $x \geq 2 \Leftrightarrow$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} \frac{2}{3}dt + \int_{1}^{2} (-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3})dt + \int_{2}^{x} 0dt = \int_{0}^{1} \frac{2}{3}dt + \int_{1}^{2} (-\frac{2}{3}t + \frac{4}{3})dt$$
$$= \frac{2}{3}\Big[t\Big]_0^1 - \frac{2}{3}\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_1^2 + \frac{4}{3}\Big[t\Big]_1^2 = \frac{2}{3}(1-0) - \frac{2}{3}(2 - \frac{1}{2}) + \frac{4}{3}(2-1) = \frac{2}{3} - 1 + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2x}{3} & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{3}(x^2 - 4x + 1) & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

(iii) Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x \cdot \frac{2}{3}dx + \int_{1}^{2} x \cdot (-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3})dx + \int_{2}^{+\infty} x \cdot 0dx$$
$$= \int_{0}^{1} x \cdot \frac{2}{3}dx + \int_{1}^{2} x \cdot (-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3})dx = \int_{0}^{1} \frac{2}{3}xdx + \int_{1}^{2} (-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x)dx$$
$$= \frac{2}{3}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 - \frac{2}{3}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_1^2 + \frac{4}{3}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - 0) - \frac{2}{3}(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}) + \frac{4}{3}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3} - \frac{14}{9} + 2 = \frac{7}{9}$$

(iv) Για τον υπολογισμό της διασποράς της Τ.Μ. $X$, $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Για τον υπολογισμό της ροπής $2^{ας}$ τάξεως, $E[X^2]$, έχουμε:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot \frac{2}{3}dx + \int_{1}^{2} x^2 \cdot (-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3})dx + \int_{2}^{+\infty} x^2 \cdot 0dx$$
$$= \int_{0}^{1} x^2 \cdot \frac{2}{3}dx + \int_{1}^{2} x^2 \cdot (-\frac{2}{3}x + \frac{4}{3})dx = \int_{0}^{1} \frac{2}{3}x^2 dx + \int_{1}^{2} (-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2)dx$$
$$= \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 + \frac{4}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(\frac{1}{3} - 0) - \frac{2}{3}(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}) + \frac{4}{3}(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{2}{9} - \frac{30}{12} + \frac{28}{9} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

Άρα, η διασπορά της Τ.Μ. $X$, $VAR[X]$ θα είναι τελικά:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{5}{6} - (\frac{7}{9})^2 = \frac{5}{6} - \frac{49}{81} = \frac{111}{486} = \frac{37}{162}$$

**Άσκηση 6**

Έστω $X$ συνεχής Τ.Μ. με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in (0, c) \\ 0 & x \in \mathbb{R}\backslash(0, c) \end{cases}$$

, όπου $c$ σταθερά με $c > 0$. Να υπολογιστούν:

(i) Η σταθερά $c$.

(ii) Η πιθανότητα $P(X \geq 1)$.

(iii) Η πιθανότητα $P(X = 1)$.

(iv) Η διασπορά της Τ.Μ. $X$, $VAR[X]$.

**Λύση**

(i) Για να είναι η $f_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int_{0}^{c} f_X(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$
$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{c} \frac{x}{2}dx + \int_{c}^{+\infty} 0dx = 1 \Leftrightarrow \int_{0}^{c} \frac{x}{2}dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^c = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{c^2}{2} - 0) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{c^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = 2}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in (0, 2) \\ 0 & x \in \mathbb{R}\backslash(0, 2) \end{cases}$$

(ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(X \geq 1) = \int_{1}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{1}^{2} f_X(x)dx = \int_{1}^{2} \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(2-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}$$

(iii) Εφ' όσον η $X$ είναι συνεχής Τ.Μ., $P(X = 1) = 0$.

(iv) Για τον υπολογισμό της διασποράς της Τ.Μ. $X$, $VAR[X]$, θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή από την θεωρία σχέση:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Με βάση τον τύπο ορισμού της μέσης τιμής, έχουμε:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf_X(x)dx + \int_{0}^{2} xf_X(x)dx + \int_{2}^{+\infty} xf_X(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{2} x \cdot \frac{x}{2}dx + \int_{2}^{+\infty} x \cdot 0dx = \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{8}{3} - 0) = \frac{1}{2}(\frac{8}{3}) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Για τον υπολογισμό της ροπής $2^{ας}$ τάξεως, $E[X^2]$, έχουμε:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2f_X(x)dx + \int_{0}^{2} x^2f_X(x)dx + \int_{2}^{+\infty} x^2f_X(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0dx + \int_{0}^{2} x^2 \cdot \frac{x}{2}dx + \int_{2}^{+\infty} x^2 \cdot 0dx = \int_{0}^{2} \frac{x^3}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{16}{4} - 0) = \frac{1}{2}(\frac{16}{4}) = \frac{16}{8} = 2$$

Άρα, η διασπορά της Τ.Μ. $X$, $VAR[X]$ θα είναι τελικά:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2 - (\frac{4}{3})^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

**Άσκηση 7**

Έστω $X$ συνεχής Τ.Μ. που ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, με $E[X] = 6$ και $P(X < 5) = 0.4$.

(i) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f_X(x)$.

(ii) Η πιθανότητα $P(X \geq 8)$.

**Λύση**

(i) **Παρατήρηση:** Σε αυτή την άσκηση μας δίνεται η κατανομή που ακολουθεί η Τ.Μ. $X$, χωρίς όμως να προσδιορίζεται το διάστημα ($[a, b]$)στο οποίο ακολουθεί αυτή την κατανομή. Τα άκρα του εν λόγω διαστήματος $(a, b)$ θα υπολογιστούν με βάση τα δεδομένα της άσκησης.

Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. $X$ ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επίσης, είναι γνωστό πως όταν η συνεχής Τ.Μ. $X$ ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $E[X] = 6$ από την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$E[X] = 6 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 6 \Rightarrow a + b = 12$$

Ακόμη, με βάση την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$P(X < 5) = 0.4 \Rightarrow \int_{-\infty}^{5} f_X(x)dx = 0.4 \Rightarrow \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx + \int_{a}^{5} f_X(x)dx = 0.4$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{5} \frac{1}{b-a}dx = 0.4 \Rightarrow \int_{a}^{5} \frac{1}{b-a}dx = 0.4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{b-a}\Big[x\Big]_a^5 = 0.4 \Rightarrow \frac{1}{b-a}(5-a) = 0.4 \Rightarrow 5 - a = 0.4b - 0.4a \Rightarrow 0.6a + 0.4b = 5$$

Επιλύοντας το παρακάτω σύτημα εξισώσεων που προκύπτει:

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ 0.6a + 0.4b = 5 \end{cases}$$

, με αγνώστους τα $a$, $b$, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 11 \end{cases}$$

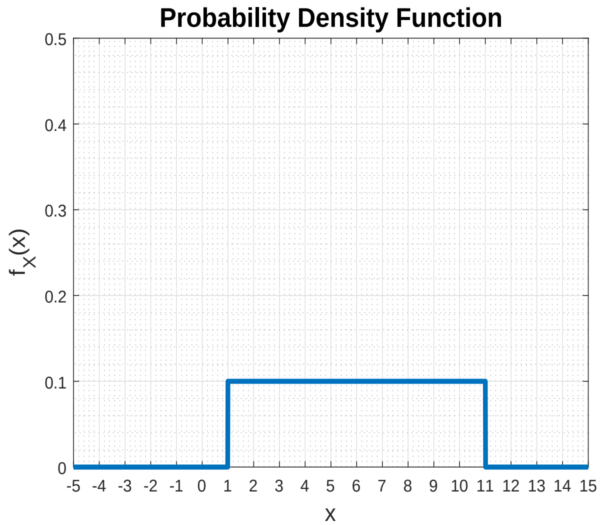
Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 1 \le x \le 11 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_X(x)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (*περιορισμένη* στο διάστημα $[-5, 15]$) που φαίνεται στο Σχήμα 5.

**Παρατήρηση:** Η $f_X(x)$ είναι μία *έγκυρη* Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, καθώς ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx + \int_{1}^{11} f_X(x)dx + \int_{11}^{+\infty} f_X(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{11} f_X(x)dx + \int_{11}^{+\infty} 0dx = \int_{1}^{11} f_X(x)dx = \int_{1}^{11} \frac{1}{10}\Big[x\Big]_1^{11} = \frac{1}{10}(11-1) = \frac{10}{10} = 1$$




Σχήμα 5: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

(ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(X \geq 8) = \int_8^{+\infty} f_X(x)dx = \int_8^{11} f_X(x)dx + \int_{11}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_8^{11} \frac{1}{10}dx + \int_{11}^{+\infty} 0dx = \int_8^{11} \frac{1}{10}dx$$
$$= \frac{1}{10}\Big[x\Big]_8^{11} = \frac{1}{10}(11-8) = \frac{1}{10}(3) = 0.3$$

**Άσκηση 8**

Προϊόν βιομηχανίας συσκευάζεται σε πακέτα. Το βάρος ενός πακέτου είναι συνεχής Τ.Μ. $X$, η οποία ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[8, 12]$. Το κόστος παραγωγής κάθε πακέτου είναι Τ.Μ. $Y$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$Y = 0.1X + 100$$

Αν ένα πακέτο έχει βάρος $\geq 9Kg$ τότε πωλείται προς $150$ ευρώ, ενώ αν έχει βάρος $< 9Kg$ τότε πωλείται προς $80$ ευρώ. Να υπολογιστεί η μέση τιμή του κέρδους για κάθε πακέτο.

**Λύση**

Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. $X$ ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με βάση τα δεδομένα της άσκησης, έχουμε $a = 8$, $b = 12$. Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 8 \leq x \leq 12 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την μέση τιμή του κέρδους για κάθε πακέτο, πρέπει να υπολογίσουμε το κέρδος για κάθε πακέτο ανάλογα με το βάρος του. Πιο συγκεκριμένα, το Κέρδος ($K(X)$) για κάθε πακέτο θα δίνεται με βάση την παρακάτω σχέση:

$$K(X) = \text{Τιμή-Πώλησης}(X) - \text{Κόστος Παραγωγής}(X)$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης, θα έχουμε λοιπόν:

- Αν $X < 9Kg \Rightarrow K_1(X) = 80 - (0.1X + 100)$
- Αν $X \geq 9Kg \Rightarrow K_2(X) = 150 - (0.1X + 100)$

Άρα, το κέρδος από κάθε πακέτο θα δίνεται τελικά από την σχέση:

$$K(x) = \begin{cases} K_1(x) = 80 - (0.1x + 100) & X < 9 \\ K_2(x) = 150 - (0.1x + 100) & X \geq 9 \end{cases}$$

Με βάση τον τύπο ορισμού και τις ιδιότητες της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[K(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{8} K(x)\cdot 0dx + \int_{8}^{12} K(x)\cdot \frac{1}{4}dx + \int_{12}^{+\infty} K(x)\cdot 0dx \\ &= \int_{8}^{12} K(x)\cdot\frac{1}{4}dx = \int_{8}^{9} K_1(x)\cdot\frac{1}{4}dx + \int_{9}^{12} K_2(x)\cdot\frac{1}{4}dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{8}^{9}(80-(0.1x+100))dx + \frac{1}{4}\int_{9}^{12}(150-(0.1x+100))dx = \frac{1}{4}\int_{8}^{9}(-0.1x-20)dx + \frac{1}{4}\int_{9}^{12}(-0.1x+50)dx \\ &= \frac{1}{4}\Bigg(-0.1\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_8^9 - 20\Big[x\Big]_8^9\Bigg) + \frac{1}{4}\Bigg(-0.1\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_9^{12} + 50\Big[x\Big]_9^{12}\Bigg) \\ &= \frac{1}{4}\Bigg[-0.1\Big(\frac{81}{2}-\frac{64}{2}\Big) - 20\Big(9-8\Big)\Bigg] + \frac{1}{4}\Bigg[-0.1\Big(\frac{144}{2}-\frac{81}{2}\Big) + 50\Big(12-9\Big)\Bigg] \\ &= \frac{1}{4}\Bigg[-0.1\Big(\frac{17}{2}\Big) - 20\Bigg] + \frac{1}{4}\Bigg[-0.1\Big(\frac{63}{2}\Big) + 150\Bigg] = \frac{1}{4}\Bigg[-0.1\Big(\frac{17}{2}+\frac{63}{2}\Big) + 130\Bigg] = \frac{1}{4}\Bigg[-0.1(40) + 130\Bigg] \\ &= \frac{1}{4}(-4+130) = \frac{126}{4} = \frac{63}{2} = 31.5 \end{aligned}$$

**Άσκηση 9**

Έστω ότι ο συρμός φτάνει σε έναν συγκεκριμένο σταθμό του μετρό κάθε $10$ λεπτά, ξεκινώντας τα δρομολόγιά του στις $05:00$. Αν ένας επιβάτης φθάνει στον σταθμό σε χρόνο ο οποίος κατανέμεται ομοιόμορφα στο χρονικό διάστημα $[07:20, 07:40]$, να υπολογιστούν οι πιθανότητες να περιμένει τον συρμό:

(i) Το πολύ $4$ λεπτά.

(ii) Τουλάχιστον $7$ λεπτά.

**Λύση**

Έστω $X$ συνεχής Τ.Μ., η οποία αντιπροσωπεύει τον χρόνο άφιξης του επιβάτη στον σταθμό, και μετράται σε λεπτά ξεκινώντας από την χρονική στιγμή $07:20$. Με βάση τα δεδομένα της άσκησης, η $X$ θα ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 20]$, με Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 0 \le x \le 20 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(i) Για να περιμένει ο επιβάτης το πολύ 4 λεπτά, σημαίνει πως φθάνει στον σταθμό είτε στο χρονικό διάστημα $[07:26, 07:30]$ είτε στο χρονικό διάστημα $[07:36, 07:40]$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P_1 = P(6 \le X \le 10) + P(16 \le X \le 20) = \int_6^{10} f_X(x)dx + \int_{16}^{20} f_X(x)dx = \int_6^{10} \frac{1}{20}dx + \int_{16}^{20} \frac{1}{20}dx$$
$$= \frac{1}{20}\Big[x\Big]_6^{10} + \frac{1}{20}\Big[x\Big]_{16}^{20} = \frac{1}{20}(10-6) + \frac{1}{20}(20-16) = \frac{1}{20}(4) + \frac{1}{20}(4) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4$$

(ii) Για να περιμένει ο επιβάτης τουλάχιστον 7 λεπτά, σημαίνει πως φθάνει στον σταθμό είτε στο χρονικό διάστημα $[07:20, 07:23]$ είτε στο χρονικό διάστημα $[07:30, 07:33]$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P_1 = P(0 \le X \le 3) + P(10 \le X \le 13) = \int_0^{3} f_X(x)dx + \int_{10}^{13} f_X(x)dx = \int_0^{3} \frac{1}{20}dx + \int_{10}^{13} \frac{1}{20}dx$$
$$= \frac{1}{20}\Big[x\Big]_0^{3} + \frac{1}{20}\Big[x\Big]_{10}^{13} = \frac{1}{20}(3-0) + \frac{1}{20}(13-10) = \frac{1}{20}(3) + \frac{1}{20}(3) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.3$$

**Άσκηση 10**

Έστω συνεχής Τ.Μ. $X$, η οποία ακολουθεί την Εκθετική Κατανομή με $E[X] = 1$.

(i) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ΑΣΚ) (CDF), $F_X(x)$.

(ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X < 1)$.

(iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X \ge 1)$.

(iv) Αν ισχύει η σχέση $P(X > c) = 0.95$, όπου $c$ σταθερά με $c \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί η σταθερά $c$.

**Λύση**

(i) Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. $X$ ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} & x \ge 0 \end{cases}$$

Επίσης, είναι γνωστό πως όταν η συνεχής Τ.Μ. $X$ ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $E[X] = 1$ από την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$E[X] = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} & x \geq 0 \end{cases}$$

Με γνωστή την Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Σύμφωνα με τον τύπο της δοσμένης Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $x < 0 \Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

(b) Για $x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt + \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}dt \\ = \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}dt = -\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\right]_{0}^{x} = -(\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} - \mathrm{e}^{0}) = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} & x \geq 0 \end{cases}$$

(ii) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, ελέγχουμε σε ποιον κλάδο της $f_X(x)$ αντιστοιχεί το προς εξέταση γεγονός, και έχουμε:

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}dx = \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}dx = -\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\right]_{0}^{1} = -(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{0}) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$$

(iii) Εκμεταλλευόμενοι βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων, έχουμε:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-1}) = 1 - 1 + \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}$$

(iv) Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X > c) = 0.95 \Rightarrow \int_{c}^{+\infty} f_X(x)dx = 0.95 \Rightarrow \int_{c}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}dx = 0.95 \\ \Rightarrow -\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\right]_{c}^{+\infty} = 0.95 \Rightarrow -(0 - \mathrm{e}^{-\mathrm{c}}) = 0.95 \Rightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{c}} = 0.95 \\ \Rightarrow -c = \ln(0.95) \Rightarrow c = -\ln(0.95) \Rightarrow c = -(-0.0513) \Rightarrow c = 0.0513 \end{aligned}$$

**Άσκηση 11**

Η διάρκεια ζωής, $T$, μίας μηχανής ακολουθεί Εκθετική Κατανομή. Η μέση διάρκεια ζωής είναι ίση με 100 μονάδες χρόνου.

(i) Να βρεθεί η πιθανότητα να πάθει βλάβη η μηχανή μέσα σε 200 μονάδες χρόνου.

(ii) Να βρεθούν οι μονάδες χρόνου $t_0$, έτσι ώστε η διάρκεια ζωής της μηχανής να τις υπερβαίνει με πιθανότητα ίση με 0.3.

**Λύση**

(i) Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. $X$ ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}} & x \geq 0 \end{cases}$$

Επίσης, είναι γνωστό πως όταν η συνεχής Τ.Μ. $X$ ακολουθεί Εκθετική Κατανομή, η μέση τιμή της δίνεται από τον τύπο:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, και δεδομένου ότι $E[X] = 100$ από την εκφώνηση της άσκησης, έχουμε:

$$E[X] = 100 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 100 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$$

Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{100}\mathrm{e}^{-\frac{1}{100}\mathrm{x}} & x \geq 0 \end{cases}$$

**Παρατήρηση:** Η διάρκεια ζωής, $T$, καθορίζει την χρονική στιγμή κατά την οποία εμφανίζεται η βλάβη. Άρα, στο διάστημα $0 \leq X < T$ δεν υπάρχει βλάβη.

Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης, επιθυμούμε η διάρκεια ζωής της μηχανής να είναι μικρότερη από 200 χρονικές μονάδες. Η πιθανότητα με την οποία συμβαίνει αυτό θα είναι:

$$P = P(T < 200) = \int_0^{200} f_X(x)dx = \int_0^{200} \frac{1}{100}\mathrm{e}^{-\frac{1}{100}\mathrm{x}}dx = -\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{100}\mathrm{x}}\right]_0^{200} = -(\mathrm{e}^{-2}-1) = 1-\mathrm{e}^{-2}$$

(ii) Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, έχουμε:

$$P(T > t_0) = 0.3 \Rightarrow \int_{t_0}^{+\infty} f_X(x)dx = 0.3 \Rightarrow \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{100}\mathrm{e}^{-\frac{1}{100}\mathrm{x}}dx = 0.3$$
$$\Rightarrow -\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{100}\mathrm{x}}\right]_{t_0}^{+\infty} = 0.3 \Rightarrow -(0 - \mathrm{e}^{-\frac{t_0}{100}}) = 0.3 \Rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{t_0}{100}} = 0.3$$
$$\Rightarrow -\frac{t_0}{100} = \ln(0.3) \Rightarrow t_0 = -100\ln(0.3) \Rightarrow t_0 = -100(-1.2040) \Rightarrow t_0 = 120.40$$