

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2016-2017
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 8
Από κοινού συναρτήσεις Τυχαίων Μεταβλητών
Επιμέλεια: Κατερίνα Καραγιαννάκη

Άσκηση 1.

Εστω η τ.μ. X με πεδίο τιμών $\{1, 2\}$ και η τ.μ. Y με πεδίο τιμών $\{1, 2, 3\}$. Υποθέστε ότι η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) για τις τ.μ. (X, Y) δίδεται από τη σχέση $p(x, y) = c(x + y)$, όπου $x \in \{1, 2\}$, $y \in \{1, 2, 3\}$ και c είναι μία σταθερά.

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας για τις τ.μ. X και Y , $p_X(x)p_Y(y)$.

(γ) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

(α) Πρέπει να ισχύει.

$$\sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 p(x, y) = 1$$

Συνεπώς

$$1 = \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 c(x+y) = c \left(\sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 x + \sum_{y=1}^3 \sum_{x=1}^2 y \right) = c \left(3 \sum_{x=1}^2 x + 2 \sum_{y=1}^3 y \right) = c(3 \cdot 3 + 2 \cdot 6) = 21c \Rightarrow c = \frac{1}{21}$$

(β)

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^3 p(x, y) = \frac{1}{21} \sum_{y=1}^3 (x+y) = \frac{3x+6}{21}, x=1, 2$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^2 p(x, y) = \frac{1}{21} \sum_{x=1}^2 (x+y) = \frac{3+2y}{21}, y=1, 2, 3$$

(γ) Έχουμε

$$p(1, 1) = \frac{1+1}{21} = \frac{2}{21}$$

$$p_X(1) \cdot p_Y(1) = \frac{9}{21} \cdot \frac{5}{21} = \frac{5}{49}$$

Αρα $p(x, y) \neq p_X(x) \cdot p_Y(y)$ και έτσι οι τ.μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 2. Θεωρείστε τις δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα :

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
$X = 2$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
$X = 3$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$

(α) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_X(x)$ της τ.μ. X . Υπολογίστε τη μέση τιμή της X , $E[X]$.

(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_Y(y)$ της τ.μ. Y . Υπολογίστε τη μέση τιμή της Y , $E[Y]$.

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. της τ.μ. Y , $p_{Y/A}(y)$, δεδομένου του γεγονότος $A = \{X \leq 2\}$. Ποια είναι η μέση τιμή, δεύτερη ροπή, και διασπορά της τ.μ. Y δεδομένου του A , δηλαδή ποια είναι τα $E[Y/A]$, $E[Y^2/A]$, και $var(Y/A)$, αντίστοιχα ;

(δ) Έστω η τ.μ. $Z = g(X, Y) = 3X + 2Y + 7$. Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. Z .

(ε) Έστω η τ.μ. $\tilde{X}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. X και η τ.μ. $\tilde{Y}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. Y . Έστω ότι οι τ.μ. $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες. Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$.

Λύση.

(α)

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^3 p_{X,Y}(x, y), \quad x = 1, 2, 3$$

Από τον πίνακα τιμών της $p_{X,Y}(x, y)$ προκύπτει εύκολα ότι :

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/9, & x = 1 \\ 3/9, & x = 2 \\ 2/9, & x = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει ότι :

$$E[X] = \sum_{x=1}^3 x p_X(x) = 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$$

(β) Ομοίως,

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^3 p_{X,Y}(x, y), \quad y = 1, 2, 3$$

Από τον πίνακα τιμών της $p_{X,Y}(x, y)$ προκύπτει εύκολα ότι :

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/9, & y = 1 \\ 3/9, & y = 2 \\ 4/9, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει ότι :

$$E[Y] = \sum_{y=1}^3 y p_Y(y) = 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$P_{Y|A}(y) = \frac{P(Y = y, A)}{P(A)}$$

όπου,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \leq 2) = \sum_{i=1}^2 p_X(x) \\ &= p_X(1) + p_X(2) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

- $\{Y = 1\} \cap \{X \leq 2\} = \{(1, 1), (2, 1)\}$. Άρα,
 $P(Y = 1, A) = p_{X,Y}(1, 1) + p_{X,Y}(2, 1) = \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{9}$
- $\{Y = 2\} \cap \{X \leq 2\} = \{(1, 2), (2, 2)\}$. Άρα,
 $P(Y = 2, A) = p_{X,Y}(1, 2) + p_{X,Y}(2, 2) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$
- $\{Y = 3\} \cap \{X \leq 2\} = \{(1, 3), (2, 3)\}$. Άρα,
 $P(Y = 3, A) = p_{X,Y}(1, 3) + p_{X,Y}(2, 3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$

Άρα, θα είναι:

$$p_{Y|A}(y) = \begin{cases} 1/7, & y = 1 \\ 3/7, & y = 2 \\ 3/7, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$E[Y|A] = \sum_{y=1}^3 y p_{Y|A}(y) = 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{16}{7}$$

$$E[Y^2|A] = \sum_{y=1}^3 y^2 p_{Y|A}(y) = 1^2 \cdot \frac{1}{7} + 2^2 \cdot \frac{3}{7} + 3^2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{40}{7}$$

$$var(Y|A) = E[Y^2|A] - (E[Y|A])^2 = \frac{40}{7} - \left(\frac{16}{7}\right)^2 = \frac{24}{49} = 0.49$$

(δ) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 E[Z] &= E[3X + 2Y + 7] = 3E[X] + 2E[Y] + 7 \\
 &= 3 \cdot \frac{16}{9} + 2 \cdot \frac{20}{9} + 7 \\
 &= \frac{151}{9} \\
 &= 16.78
 \end{aligned}$$

(ε) Καθώς οι $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, θα είναι:

$$p_{\tilde{X}, \tilde{Y}}(x, y) = p_{\tilde{X}} \cdot p_{\tilde{Y}}(y), \quad x, y = 1, 2, 3.$$

όπου οι $p_{\tilde{X}}(x)$ και $p_{\tilde{Y}}(y)$ ακολουθούν τις εκφράσεις στα (α) και (β). Οι τιμές της $p_{\tilde{X}, \tilde{Y}}(x, y)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	$\tilde{Y}=1$	$\tilde{Y}=2$	$\tilde{Y}=3$
$\tilde{X}=1$	8/81	12/81	16/81
$\tilde{X}=2$	6/81	9/81	12/81
$\tilde{X}=3$	4/81	6/81	8/81

Άσκηση 3.

Έχετε στα χέρια σας ένα δίκαιο 6-εδρο ζάρι και ένα δίκαιο κέρμα. Ρίχνετε πρώτα το ζάρι και έστω X ο αριθμός που έρχεται. Στη συνέχεια, ρίχνετε το κέρμα X φορές και έστω ότι εμφανίζονται Y κεφαλές.

- (α') Ποια είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p_{Y/X}(y/x)$; Δώστε την πλήρη μαθηματική περιγραφή της.
- (β') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y = 3 / X = 6)$.
- (γ') Ποια είναι η Συνάρτηση Πιθανότητας της τ.μ. X ;
- (δ') Υπολογίστε την από κοινού Σ.Π. $p_{X,Y}(x, y)$ των τ.μ. X και Y .
- (ε') Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος να εμφανιστούν μόνο κεφαλές, δηλαδή $P(X = Y)$.

Λύση.

- (α') Δεδομένου ότι φέρνουμε $X = x$ στη ρίψη του 6-εδρου δίκαιου ζαριού, ρίχνουμε το κέρμα x φορές και το πλήθος Y των κεφαλών που εμφανίζονται ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = x$ και $p = \frac{1}{2}$:

$$Y/\{X = x\} \sim \Delta(x, \frac{1}{2})$$

Συνεπώς,

$$P_{Y/X}(y/x) = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{x-y} = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq x.$$

(β') $P(Y = 3 / X = 6) = P_{Y/X}(y = 3 / x = 6) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = 0.3125.$

- (γ') Προφανώς, η X είναι διακριτή ομοιόμορφη τ.μ. στο πεδίο τιμών $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- (δ') Γνωρίζουμε ότι η δεσμευμένη Σ.Π. συχνά είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό της από κοινού Σ.Π. μέσω του Πολλαπλασιαστικού νόμου:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_Y(y \cdot p_{X/Y}(x/y)) \\ &= p_X(x) \cdot p_{Y/X}(y/x) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η από κοινού Σ.Π. των X και Y είναι:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_X(x) \cdot p_{Y/X}(y/x) \\ &= \frac{1}{6} \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq x. \end{aligned}$$

- (ε') Η πιθανότητα του γεγονότος να εμφανιστούν μόνο κεφαλές είναι

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{i=1}^6 p_{X,Y}(i, i) \quad (x = i, y = i) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \binom{i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right] = 0.164. \end{aligned}$$

Άσκηση 4.

Οι τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{cy}{x}, & x \in \{1, 4, 6\} \text{ και } y \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α) Υπολογίστε τη σταθερά c .
 (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y < X)$.
 (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y > X)$.
 (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2Y = X)$.
 (ε) Υπολογίστε τις περιθωριακές ΣΠ $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.
 (στ) Υπολογίστε τις μέσες τιμές $E[X]$ και $E[Y]$.
 (ζ) Υπολογίστε τις διασπορές $var(X)$ και $var(Y)$.

Λύση.

(α) Από την έκφραση της από κοινού συνάρτηση πιθανότητας βλέπουμε ότι υπάρχουν 9 (x, y) υποψήφια ζεύγη με μη μηδενική πιθανότητα. Τα ζεύγη αυτά είναι τα $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(6, 1)$, $(6, 2)$ και $(6, 3)$. Η πιθανότητα ενός ζεύγους είναι ανάλογη του κλάσματος y/x των συντεταγμένων του ζεύγους. Καθώς η πιθανότητα του δειγματοχώρου ισούται με 1, ισχύει:

$$\frac{1}{1}c + \frac{2}{1}c + \frac{3}{1}c + \frac{1}{4}c + \frac{2}{4}c + \frac{3}{4}c + \frac{1}{6}c + \frac{2}{6}c + \frac{3}{6}c = 1.$$

Λύνοντας ως προς c , έχουμε $c = \frac{2}{17}$.

(β) Υπάρχουν 3 σημεία για τα οποία ισχύει $2Y < X$.

$$P(2Y < X) = P(\{(4, 1)\}) + P(\{(6, 1)\}) + P(\{(6, 2)\}) = \frac{2}{17}(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}) = \frac{3}{34}.$$

(γ) Υπάρχουν 4 σημεία για τα οποία ισχύει $2Y > X$.

$$P(2Y > X) = P(\{(1, 1)\}) + P(\{(1, 2)\}) + P(\{(1, 3)\}) + P(\{(4, 3)\}) = \frac{2}{17}(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{3}{4}) = \frac{27}{34}.$$

(δ) Υπάρχουν 2 σημεία για τα οποία ισχύει $2Y = X$.

$$P(2Y = X) = P(\{(4, 2)\}) + P(\{(6, 3)\}) = \frac{2}{17}(\frac{2}{4} + \frac{3}{6}) = \frac{2}{17}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$P(2Y < X) + P(2Y > X) + P(2Y = X) = \frac{3}{34} + \frac{27}{34} + \frac{2}{17} = 1,$$

όπως θα περιμέναμε.

(ε) Για 2 διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$, έχουμε:

$$p_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) \quad \text{και} \quad p_Y(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y).$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα ο αριθμός των πιθανών ζευγών (X, Y) είναι αρκετά μικρός, άρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τις περιθωριακές ΣΠ αριθμητικά. Για παράδειγμα,

$$p_X(4) = P(\{(4, 1)\}) + P(\{(4, 2)\}) + P(\{(4, 3)\}) = \frac{6}{34}.$$

Συνολικά έχουμε:

$$p_X(x) = \begin{cases} 12/17, & x = 1, \\ 3/17, & x = 4, \\ 2/17, & x = 6, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/6, & y = 1 \\ 1/3, & y = 2, \\ 1/2, & y = 3, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(στ) Η μέση τιμή μιας τυχαίας διακριτής μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$E[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} xp_X(x).$$

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε,

$$E[X] = 1 \cdot \frac{12}{17} + 4 \cdot \frac{3}{17} + 6 \cdot \frac{2}{17} = \frac{36}{17}$$

και

$$E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3}.$$

(ζ) Η διασπορά μιας τυχαίας διακριτής μεταβλητής X υπολογίζεται από τον $E[X^2] - (E[X])^2$ ή από τον $E[(X - E[X])^2]$. Εφαρμόζοντας το δεύτερο τύπο ισχύει,

$$var(X) = (1 - \frac{36}{17})^2 \cdot \frac{12}{17} + (4 - \frac{36}{17})^2 \cdot \frac{3}{17} + (6 - \frac{36}{17})^2 \cdot \frac{2}{17} = \frac{948}{289}$$

$$var(Y) = (1 - \frac{7}{3})^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - \frac{7}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} + (3 - \frac{7}{3})^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}.$$

Ασκηση 5.

Θεωρείστε τις δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα :

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Υπολογίστε την τιμή $p_Y(2)$.

(γ) Θεωρείστε την τ.μ. $Z = YX^2$. Υπολογίστε τη σ.π. της Z .

(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. της τ.μ. X δεδομένου του γεγονότος $\{Y = 2\}$, δηλαδή την $p_{X/Y}(x/2)$. Βρείτε την $E[Z/Y = 2]$.

(ε) Υπολογίστε την δεσμευμένη διασπορά της Y δεδομένου του γεγονότος $\{X = 2\}$.

Λύση.

(α) Πρέπει

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 p_{xy}(x, y) &= 1 \Rightarrow \\ c + c + 2c + 2c + 0 + 4c + 3c + c + 6c &= 1 \Rightarrow \\ 20c &= 1 \Rightarrow \\ c &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

(β)

$$p_Y(2) = \sum_{x=1}^3 p_{X,Y}(x, 2) = 2c + 0 + 4c = 6c = \frac{3}{10}$$

(γ) Το πεδίο τιμών της Z είναι $\{1, 4, 9, 2, 18, 3, 12, 27\}$ και η συνάρτηση πιθανότητας της είναι :

z	1	2	3	4	9	12	18	27
$p_Z(z)$	3/20	2/20	1/20	1/20	6/20	1/20	4/20	2/20

(δ)

$$p_{X|Y}(x|2) = \frac{P_{X,Y}(x,2)}{P_Y(2)} = \begin{cases} \frac{2c}{6c} = \frac{1}{3} & , x = 1 \\ \frac{4c}{6c} = \frac{2}{3} & , x = 3 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[Z|Y=2] &= E[YX^2|Y=2] \\ &= E[2X^2|Y=2] \\ &= 2E[X^2|Y=2] \\ &= 2 \sum_{x=1}^3 x^2 p_{X|Y}(x|2) \\ &= 2 \left(1^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{38}{3} \end{aligned}$$

(ε) Έχουμε ότι $p_X(2) = \sum_{y=1}^3 p_{X,Y}(2,y) = c + 0 + c = 2c = 2/10$.

$$p_{Y|X}(y|2) = \frac{P_{X,Y}(2,y)}{P_X(2)} = \begin{cases} \frac{c}{2c} = \frac{1}{2} & , y = 1 \\ \frac{c}{2c} = \frac{1}{2} & , y = 3 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε την δεσμευμένη διασπορά χρειαζόμαστε:

$$E[Y^2|X=2] = \sum_{y=1}^3 y^2 \cdot p_{Y|X}(y|2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$E[Y|X=2] = \sum_{y=1}^3 y \cdot p_{Y|X}(y|2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Άρα:

$$\text{var}(Y|X=2) = E[Y^2|X=2] - (E[Y|X=2])^2 = 5 - 2^2 = 1.$$

Άσκηση 6. Δύο παίκτες ρίχνουν ένα δίκαιο τετράεδρο ζάρι δύο φορές ο καθένας. Ο παίκτης Α κερδίζει σε ευρώ το ποσό X που ορίζεται ως το μέγιστο των δύο ρίψεων μείον 1. Ο παίκτης Β κερδίζει σε ευρώ το ποσό Y που ορίζεται ως το ελάχιστο των δύο ρίψεων.

(α) Υπολογίστε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X και Y , $p_{X,Y}(x, y)$, καθώς και τις περιθωριακές ΣΠ $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.

(β) Υπολογίστε τις μέσες τιμές των τ.μ. X , Y και $X - Y$.

(γ) Υπολογίστε τις διασπορές των τ.μ. X και Y .

(δ) Υπολογίστε τη ΣΠ και τη διασπορά της τ.μ. $Z = X - Y$.

Λύση

(α) Ορίζουμε τις 2 διαδοχικές ρίψεις με W, Z αντίστοιχα. Τα 16 ισοπίθανα ζεύγη φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (κάθε κελί περιέχει το ζεύγος (X, Y)).

	$Z=1$	$Z=2$	$Z=3$	$Z=4$
$W=1$	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)
$W=2$	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(3,2)
$W=3$	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,3)
$W=4$	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)

Από τον πίνακα μπορούμε να βρούμε τις συναρτήσεις πιθανότητας για τα X, Y .

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & k=0 \\ \frac{3}{16}, & k=1 \\ \frac{5}{16}, & k=2 \\ \frac{7}{16}, & k=3 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$$p_Y(k) = \begin{cases} \frac{7}{16}, & k=1 \\ \frac{5}{16}, & k=2 \\ \frac{3}{16}, & k=3 \\ \frac{1}{16}, & k=4 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές αντίστοιχα,

$$E[X] = \frac{1}{16} \cdot 0 + \frac{3}{16} \cdot 1 + \frac{5}{16} \cdot 2 + \frac{7}{16} \cdot 3 = \frac{17}{8},$$

$$E[Y] = \frac{7}{16} \cdot 1 + \frac{5}{16} \cdot 2 + \frac{3}{16} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{15}{8}.$$

Από την γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε ότι :

$$E[X - Y] = E[X] - E[Y] = \frac{1}{4}.$$

(β) Από τις συναρτήσεις πιθανότητας στο (α) μπορούμε να υπολογίσουμε τα εξής:

$$E[X^2] = \frac{1}{16} \cdot 0^2 + \frac{3}{16} \cdot 1^2 + \frac{5}{16} \cdot 2^2 + \frac{7}{16} \cdot 3^2 = \frac{43}{8},$$

$$E[Y^2] = \frac{7}{16} \cdot 1^2 + \frac{5}{16} \cdot 2^2 + \frac{3}{16} \cdot 3^2 + \frac{1}{16} \cdot 4^2 = \frac{35}{8}.$$

$$\text{Άρα, } \text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{55}{64} \text{ και } \text{var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{55}{64}.$$

Αφού οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, οι διασπορά των X και Y δεν είναι κάποιος απλός συνδιασμός των παραπάνω. Μάλιστα, αν $Z = X - Y$ τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Z είναι:

$$p_Z(k) = \begin{cases} \frac{4}{16}, & k = -1 \\ \frac{6}{16}, & k = 0 \\ \frac{4}{16}, & k = 1 \\ \frac{2}{16}, & k = 2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } E[Z^2] = \frac{4}{16} \cdot (-1)^2 + \frac{6}{16} \cdot 0^2 + \frac{4}{16} \cdot 1^2 + \frac{2}{16} \cdot 2^2 = 1, \text{ και}$$

$$\text{var}(Z) = E[Z^2] - (E[Z])^2 = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}.$$