

Τυχαία Μεταβλητή (Τ.Μ.): Συνάρτηση πραγματικών τιμών του πειραματικού αποτελέσματος.

π.χ. : Ρίχνω 3 φορές ένα νόμισμα και μετρώ πόσες φορές έφερα «κορώνα», ρίχνω 2 φορές ένα ζάρι και μετρώ το άθροισμα των ρίψεων

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή: Το πεδίο τιμών της είναι πεπερασμένο / αριθμήσιμα άπειρο.

Συνάρτηση Πιθανότητας Μάζας (ΣΜΠ): Οι πιθανότητες των τιμών που μπορεί να πάρει η Τ.Μ. X .

- Αν x είναι μία τιμή της Τ.Μ. X , τότε: $p_X(x) = P(X = x)$
- Η $p_X(x)$ πρέπει να ικανοποιεί τη Συνθήκη Κανονικοποίησης:
$$\sum_x p_X(x) = 1$$

Υπολογισμός της ΣΠΜ μιας Τ.Μ. X :

- Συλλέγω όλα τα δυνατά αποτελέσματα που αντιστοιχούν στο γεγονός ($X = x$)
- Προσθέτω τις πιθανότητές τους, για να βρω την $p_X(x)$

Άσκηση 1: Έστω διακριτή Τ.Μ. X με ΣΜΠ $p_X(x) = cx, x = 1, 2, \dots, n$. Να υπολογιστεί η σταθερά c .

Λύση: Θα πρέπει να ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \sum_x p_X(x) = 1 &\rightarrow \sum_{x=1}^n cx = 1 \rightarrow c \sum_{x=1}^n x = 1 \rightarrow c \frac{n(n+1)}{2} = 1 \rightarrow c \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

, όπου χρησιμοποιήθηκε ο τύπος υπολογισμού του αθροίσματος n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου: $\sum_{x=1}^n x = \frac{n(n+1)}{2}$.

Άσκηση 2: Έστω ότι η Τ.Μ. X παριστάνει το άθροισμα των αποτελεσμάτων στη ρίψη 2 «τίμιων» ζαριών. Να υπολογιστεί η PMF $p_X(x)$.

Λύση: Ο δειγματικός χώρος του πειράματός μας περιλαμβάνει 36 διαφορετικά ενδεχόμενα, τα οποία φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

1° Ζάρι/2° Ζάρι	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Με βάση τον παραπάνω πίνακα, και τον ορισμό της Τ.Μ. X από την εκφώνηση της άσκησης, η X παίρνει τις εξής τιμές:

1° Ζάρι/2° Ζάρι	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Εφ' όσον όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα (τα ζάρια είναι «τίμια»), κάθε ένα από αυτά θα έχει πιθανότητα ίση με $\frac{1}{36}$.

Καταμετρώντας λοιπόν τις «ευνοϊκές» περιπτώσεις για κάθε πιθανή τιμή της Τ.Μ. X από τον παραπάνω πίνακα, προκύπτει τελικά ότι:

- $p_X(x) = \frac{1}{36}, x = 2, 12$
- $p_X(x) = \frac{2}{36}, x = 3, 11$

- $p_X(x) = \frac{3}{36}, x = 4, 10$
- $p_X(x) = \frac{4}{36}, x = 5, 9$
- $p_X(x) = \frac{5}{36}, x = 6, 8$
- $p_X(x) = \frac{6}{36}, x = 7$

T.M. Bernoulli: Ένα πείραμα τύχης πραγματοποιείται 1 φορά, και μετράμε την «επιτυχία» («αποτυχία»).

π.χ. : Ρίχνω ένα νόμισμα 1 φορά. Έρχεται «κορώνα» (επιτυχία) με πιθανότητα p και «γράμματα» (αποτυχία) με πιθανότητα $q = 1 - p$. Δηλαδή έχουμε:

$$X = \begin{cases} 1, \text{Κορώνα} \\ 0, \text{Γράμματα} \end{cases}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} p, x = 1 \\ 1 - p, x = 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση 1: Η T.M. Bernoulli έχει μόνο μία άγνωστη παράμετρο για τον ακριβή προσδιορισμό της: την πιθανότητα «επιτυχίας» (p).

Παρατήρηση 2: Η T.M. Bernoulli αποτελεί τη βάση για την μοντελοποίηση πειραμάτων τύχης με μόνο 2 δυνατά αποτελέσματα (επιτυχία-αποτυχία), όπως για παράδειγμα αν κάποιος είναι ασθενής ή όχι, αν μία τηλεφωνική γραμμή είναι κατηλειμμένη ή όχι, κλπ...

Παρατήρηση 3: Φυσική Σημασία T.M. Bernoulli $\rightarrow$ Αριθμός επιτυχιών σε 1 πείραμα με πιθανότητα επιτυχίας p .

Διωνυμική T.M.: Ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται n ανεξάρτητες μεταξύ τους φορές, και μετράμε το πλήθος k των «επιτυχιών» σε αυτές τις φορές.

Έχει ΣΜΠ την εξής:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$$

Παρατήρηση 1: Η Διωνυμική T.M. έχει 2 παραμέτρους για τον ακριβή προσδιορισμό της: τον αριθμό εκτέλεσης των πειραμάτων (n) και την πιθανότητα «επιτυχίας» (p).

Παρατήρηση 2: Η Διωνυμική T.M. αποτελεί “γενίκευση” της T.M. Bernoulli.

Παρατήρηση 3: Φυσική Σημασία Διωνυμικής T.M. Bernoulli → Αριθμός επιτυχιών σε n όμοια και ανεξάρτητα πειράματα με πιθανότητα επιτυχίας p .

Άσκηση 3: Από τα e-mail που λαμβάνει ένας χρήστης, το 35% είναι spam. Υποθέτουμε ότι το αν κάποιο e-mail είναι spam ή όχι είναι ανεξάρτητο από e-mail σε e-mail. Έστω ότι ο χρήστης παίρνει 25 e-mails σε μία μέρα και έστω X το πλήθος των spam ανάμεσα σε αυτά. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

- A) Ο χρήστης να λάβει σε μία μέρα 3 spam e-mails
- B) Ο χρήστης να μη λάβει σε μία μέρα κανένα spam e-mail
- Γ) Ο χρήστης να λάβει σε μία μέρα τουλάχιστον 1 spam e-mail
- Δ) Ο χρήστης να λάβει σε μία μέρα 8, 9 ή 10 spam e-mails

Λύση: Η κατανομή της X είναι Διωνυμική, με παραμέτρους $n = 25$ και $p = 0.35$, αν θεωρήσουμε ότι η λήψη ενός e-mail είναι πείραμα που «επιτυγχάνει» όταν το e-mail είναι spam. Με βάση αυτό, έχουμε για τις ζητούμενες πιθανότητες:

A) $P(X = 3) = \binom{25}{3}(0.35)^3(0.65)^{22} = \dots$

B) $P(X = 0) = \binom{25}{0}(0.35)^0(0.65)^{25} = \dots$

Γ) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{25}{0}(0.35)^0(0.65)^{25} = \dots$

Δ) $P(X = 8,9,10) = \binom{25}{8}(0.35)^8(0.65)^{17} + \binom{25}{9}(0.35)^9(0.65)^{16} + \binom{25}{10}(0.35)^{10}(0.65)^{15} = \dots$

Άσκηση 4: Ένα αεροπλάνο έχει 200 θέσεις, και έχουν γίνει 210 κρατήσεις από επιβάτες. Κάθε ένας από αυτούς θα έρθει στο αεροδρόμιο με πιθανότητα 93%, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ποια η πιθανότητα κάποιοι επιβάτες που θα φτάσουν στο αεροδρόμιο να είναι υπεράριθμοι;

Λύση: Έστω X το πλήθος των επιβατών που θα έρθουν στο αεροδρόμιο. Τότε η Τ.Μ. X ακολουθεί Διωνυμική Κατανομή με παραμέτρους $n = 210$ και $p = 0.93$.

Το γεγονός κάποιοι επιβάτες να είναι υπεράριθμοι θα συμβεί αν $X \geq 201$, εφ' όσον το αεροπλάνο έχει 200 θέσεις. Ως εκ τούτου, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} P(X \geq 201) &= P(X = 201) + P(X = 201) + \dots + P(X = 210) \\ &= \binom{210}{201} (0.93)^{201} (0.65)^9 + \binom{210}{202} (0.93)^{202} (0.65)^8 + \dots \\ &\quad + \binom{210}{210} (0.93)^{210} (0.65)^0 = \dots = 0.0728 \end{aligned}$$

Άσκηση 5: Έστω ότι ρίχνουμε βολές εναντίον στόχου με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.3$. Να υπολογιστεί ο αριθμός n των βολών που απαιτούνται έτσι ώστε η πιθανότητα να χτυπηθεί ο στόχος τουλάχιστον 1 φορά να είναι τουλάχιστον 90%.

Λύση: Έστω X Τ.Μ. που μετράει το πλήθος των επιτυχών βολών μας. Η X ακολουθεί Διωνυμική Κατανομή με πιθανότητα $p = 0.3$. Η δεύτερη παράμετρός της (n), θα υπολογιστεί από τα δεδομένα της άσκησης ως εξής:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &\geq 0.9 \rightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0.9 \rightarrow 1 - \binom{n}{0} (p)^0 (1-p)^n \geq 0.9 \\ &\rightarrow 1 - (0.7)^n \geq 0.9 \rightarrow (0.7)^n \leq 0.1 \rightarrow n \ln 0.7 \geq \ln 0.1 \\ &\rightarrow n \geq \frac{\ln 0.1}{\ln 0.7} \rightarrow n \geq \frac{-2.3026}{-0.3567} \rightarrow n \geq 6.4553 \rightarrow n = 7 \end{aligned}$$

Άσκηση 6: Η εταιρεία Αττικό Μετρό Α.Ε. δημιουργεί τους σταθμούς στη γραμμή 2 του μετρό με τον εξής αλγόριθμο: Στο μηχανοστάσιο υπάρχουν συνολικά 6 βαγόνια. Αν ένα βαγόνι λειτουργεί τότε προστίθεται στο συρμό. Αν δε λειτουργεί, τότε παραμένει στο μηχανοστάσιο. Ένα τυχαία επιλεγμένο βαγόνι λειτουργεί με πιθανότητα $\frac{2}{3}$, ανεξάρτητα απ' όλα τα υπόλοιπα. Ορίζουμε την Τ.Μ. X ως το μήκος του συρμού, δηλαδή ως το πλήθος των βαγονιών που τον αποτελούν.

Α) Να προσδιοριστεί η κατανομή της X και η ΣΜΠ $p_X(k)$

Β) Ποια είναι η πιθανότητα να μην υπάρχει συρμός στη γραμμή 2;

Γ) Ποια είναι η πιθανότητα ο συρμός να έχει τουλάχιστον τα $\frac{2}{3}$ του μέγιστου αριθμού των διαθέσιμων βαγονιών;

Λύση:

Α) Εφ' όσον έχουμε μόνο δυο δυνατά αποτελέσματα (είτε ένα βαγόνι θα ανήκει στο συρμό είτε όχι), και το πείραμα επαναλαμβάνεται πολλές φορές (συνολικά 6 βαγόνια), καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται περί Διωνυμικής Κατανομής με παραμέτρους $n = 6$ και $p = \frac{2}{3}$. Ως εκ τούτου, η ΣΜΠ θα δίνεται από τον εξής τύπο:

$$p_X(k) = \binom{6}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k}, k = 0, 1, \dots, 6$$

Β) Για να μην υπάρχει συρμός στη γραμμή 2, σημαίνει πως κανένα βαγόνι δεν έχει προστεθεί σε αυτό. Δηλαδή, αναζητούμε την πιθανότητα $P(X = 0)$, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729} = 0.001372$$

Γ) Για να έχει ο συρμός τουλάχιστον τα $\frac{2}{3}$ του μέγιστου αριθμού των διαθέσιμων βαγονιών, θα πρέπει να έχει 4, 5 ή 6 βαγόνια. Ως εκ τούτου, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \\ &= \binom{6}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{6}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \dots \end{aligned}$$

Τυχαία Μεταβλητή Poisson: Έχει ΣΜΠ που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$$

Παρατήρηση 1: Η Τ.Μ. Poisson έχει μόνο μία άγνωστη παράμετρο για τον ακριβή προσδιορισμό της: τη σταθερά λ .

Παρατήρηση 2: Η Κατανομή Poisson αποτελεί καλή προσέγγιση της Διωνυμικής Κατανομής όταν το n είναι «πολύ μεγάλο» και το p είναι «πολύ μικρό». Σε αυτή την περίπτωση, ισχύει $\lambda = np$. Η ύπαρξη αυτής

της προσέγγισης είναι χρήσιμη για 2 λόγους. Πρώτον, γιατί σε ορισμένες περιπτώσεις μειώνει σημαντικά τον αριθμό των πράξεων. Δεύτερον, γιατί μας επιτρέπει σε ορισμένες περιπτώσεις που εμφανίζεται η Διωνυμική Κατανομή, να εισάγουμε την Κατανομή Poisson και να χρησιμοποιούμε τις πολύ καλές της ιδιότητες.

Παρατήρηση 3: Φυσική Σημασία Poisson T.M. → Προσέγγιση της Διωνυμικής Κατανομής όταν $n \rightarrow \infty$ και $p = \frac{\lambda}{n}$.

Άσκηση 7: Ας υποθέσουμε ότι η παραγωγή ενός βιομηχανικού προϊόντος γίνεται κάτω από στατιστικό έλεγχο ποιότητας έτσι ώστε να πληρούνται οι υποθέσεις του στοχαστικού προτύπου (μοντέλου) των ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli. Μια μονάδα του προϊόντος αυτού θεωρείται ελαττωματική αν δεν πληροί όλες τις καθορισμένες προδιαγραφές και η πιθανότητα γι' αυτό έστω ότι είναι $p = 0.01$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως σε ένα κιβώτιο 100 μονάδων του προϊόντος αυτού υπάρχει μια το πολύ ελαττωματική.

Λύση: Έστω X ο αριθμός των ελαττωματικών μονάδων του προϊόντος στο κιβώτιο των 100 μονάδων. Η τυχαία αυτή μεταβλητή ακολουθεί τη Διωνυμική Κατανομή με ΣΜΠ:

$$p_X(k) = \binom{100}{k} (0.01)^k (0.99)^{100-k}, k = 0, 1, \dots, 100$$

Χρησιμοποιώντας τη διωνυμική συνάρτηση πιθανότητας, παίρνουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \binom{100}{0} (0.01)^0 (0.99)^{100} + \binom{100}{1} (0.01)^1 (0.99)^{99} = \dots \\ &= 0.7357 \end{aligned}$$

Επειδή το $n = 100$ είναι «μεγάλο» και το $p = 0.01$ «μικρό» έτσι ώστε $\lambda = np = 100 \times 0.01 = 1$, η προσέγγιση αυτής από την Poisson με ΣΜΠ:

$$p_X(k) = e^{-1} \frac{1^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

είναι ικανοποιητική. Πράγματι, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 2e^{-1} = 2 \times 0.3679 = 0.7358$$

Άσκηση 8: Παίζουμε το εξής παιχνίδι: Ρίχνουμε 4 «τίμια» ζάρια συγχρόνως, και κερδίζουμε όταν έρθουν «6» και τα 4. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα 1000 φορές. Να υπολογιστεί η πιθανότητα στα 1000 παιχνίδια να κερδίσουμε ακριβώς 2 φορές.

Λύση: Έστω X το πλήθος των φορών που κερδίσαμε. Η κατανομή της X είναι Διωνυμική με παραμέτρους $n = 1000$ και $p = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$, αφού τα ζάρια είναι «τίμια» και ανεξάρτητα μεταξύ τους. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(X = 2) = \binom{1000}{2} \left(\frac{1}{1296}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{1296}\right)^{998} \approx 0.137645$$

Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι το n είναι αρκετά μεγάλο και το p είναι αρκετά μικρό. Συνεπώς, μπορούμε να προσεγγίσουμε την κατανομή με την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = np = 0.7716$. Με βάση αυτή την προσέγγιση, έχουμε:

$$P(X = 2) = e^{-0.7716} \frac{(0.7716)^2}{2!} \approx 0.137611$$

Άσκηση 7: Η Τ.Μ. X ακολουθεί κατανομή Poisson έτσι ώστε να ισχύει η σχέση: $P(X = 1) = P(X = 2)$. Να βρεθεί η $P(X = 3)$.

Λύση: Εφ' όσον η Τ.Μ. X ακολουθεί κατανομή Poisson, η ΣΜΠ της δίνεται από την εξής σχέση:

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Από τα δεδομένα της άσκησης, υπολογίζουμε την άγνωστη παράμετρο λ ως εξής:

$$P(X = 1) = P(X = 2) \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} \rightarrow \lambda = \frac{\lambda^2}{2} \rightarrow \lambda = 2$$

Ως εκ τούτου, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(X = 3) = e^{-2} \frac{2^3}{3!} = \frac{4}{3} e^{-2}$$

Άσκηση 8: Η ΣΜΠ μιας Τ.Μ. Χ δίνεται από της παρακάτω σχέση:

$$p_X(k) = c \frac{\lambda^k}{k!}, \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

Α) Να υπολογιστεί η σταθερά c

Β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X = 0)$

Γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 2)$

Λύση:

Α) Θα πρέπει να ικανοποιείται η Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c \frac{\lambda^k}{k!} = 1 \rightarrow c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1 \rightarrow c e^{\lambda} = 1 \rightarrow c = e^{-\lambda}$$

, όπου χρησιμοποιήθηκε το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της εκθετικής συνάρτησης: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$\text{Β) } P(X = 0) = p_X(0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

$$\text{Γ) } P(X > 2) = \sum_{k=3}^{\infty} p_X(k) = \sum_{k=3}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω υπολογισμός είναι σχετικά πολύπλοκος-χρονοβόρος. Ως εκ τούτου, ανάγουμε τον υπολογισμό σε αυτόν του συμπληρωματικού ενδεχομένου ως εξής:

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Την κατανομή Poisson ακολουθεί ο αριθμός εμφανίσεων ενός γεγονότος Α σε ορισμένο χωρικό / χρονικό διάστημα. Η παράμετρος λ έχει τιμή η οποία είναι ανάλογη του μήκους του χωρικού – χρονικού διαστήματος.

Άσκηση 9: Ο ΒΟΑΚ παρουσιάζει κατά μέσο όρο 3 ρωγμές/χλμ. Να υπολογιστούν:

Α) Η πιθανότητα να παρουσιαστεί 1 ρωγμή σε μήκος 1 χιλιομέτρου.

Β) Η πιθανότητα να παρουσιαστεί τουλάχιστον 1 ρωγμή σε μήκος 3 χιλιομέτρων

Λύση: Κάθε ρωγμή μπορεί να θεωρηθεί ως συμβάν το οποίο εμφανίζεται σε χωρικό διάστημα. Έτσι, ο αριθμός των ρωγμών που παρουσιάζονται σε ορισμένο μήκος δρόμου ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ . Η τιμή της παραμέτρου λ είναι ανάλογη του θεωρούμενου μήκους, και ισούται με το μέσο αριθμό συμβάντων στο μήκος αυτό.

Α) Στο ερώτημα αυτό, το μήκος που θεωρούμε είναι 1χλμ, στο οποίο παρουσιάζονται κατά μ.ο. 3 ρωγμές. Άρα είναι $\lambda=3$, και η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(k = 1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-3} \frac{3^1}{1!} = 3e^{-3} \approx 0.1494$$

Β) Εδώ, το θεωρούμενο μήκος είναι 3χλμ, και επειδή το λ είναι ανάλογο του θεωρούμενου μήκους, έχουμε $\lambda = 3 \times 3 = 9$ (ο μ.ο. συμβάντων ανά 3/χλμ). Ως εκ τούτου, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-9} \frac{9^0}{0!} = 1 - e^{-9} \approx 0.9999$$

Άσκηση 10: Σε μια συγκεκριμένη αεροπορική πτήση που εξυπηρετείται από αεροπλάνο 80 θέσεων έχει παρατηρηθεί ότι 4 επιβάτες κατά μέσο όρο δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση. Δεδομένου ότι ο αριθμός X των επιβατών που δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση ακολουθεί την κατανομή Poisson, ποια είναι η πιθανότητα άτομο που βρίσκεται:

(Α) στη δεύτερη θέση

(Β) στην πέμπτη θέση

του καταλόγου αναμονής να ταξιδεύσει;

Λύση: Εφ' όσον ο αριθμός X των επιβατών που δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση ακολουθεί την κατανομή Poisson η ΣΠΜ θα είναι:

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Αφού έχει παρατηρηθεί ότι 4 επιβάτες κατά μ.ο. δεν προσέρχονται κατά την αναχώρηση, συμπαιρνουμε ότι η παράμετρος $\lambda = 4$.

Α) Για να ταξιδεύσει ο 2^{ος} επιβάτης του καταλόγου αναμονής, θα πρέπει να μην προσέλθουν τουλάχιστον 2 από τους επιβάτες που ήταν προγραμματισμένο να πετάξουν. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - 0.0183 - 0.0733 = 0.9084 \end{aligned}$$

, που σημαίνει ότι είναι σχεδόν βέβαιο ότι το άτομο θα ταξιδέψει.

Β) Για να ταξιδεύσει ο 5^{ος} επιβάτης του καταλόγου αναμονής, θα πρέπει να μην προσέλθουν τουλάχιστον 5 από τους επιβάτες που ήταν προγραμματισμένο να πετάξουν. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) \\ &\quad - P(X = 4) - P(X = 5) \\ &= 1 - 0.0183 - 0.0733 - 0.1465 - 0.1954 - 0.1954 \\ &= 0.3711 \end{aligned}$$

Γεωμετρική Τ.Μ: Εκτελούμε ένα πείραμα Bernoulli συνεχόμενες φορές, και ενδιαφερόμαστε για το πλήθος των δοκιμών μέχρι την 1^η εμφάνιση της «επιτυχίας». Αν ορίσουμε ως X την τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει αυτό ακριβώς το πλήθος, τότε αυτή έχει ΣΜΠ την εξής:

$$p_X(k) = (1 - p)^{k-1}p, k = 1, 2, 3, \dots$$

Παρατήρηση 1: Η Γεωμετρική Τ.Μ. έχει 1 παράμετρο για τον ακριβή προσδιορισμό της: την πιθανότητα «επιτυχίας»(p).

Παρατήρηση 2: Φυσική Σημασία Γεωμετρικής Τ.Μ. → Αριθμός προσπαθειών μέχρι την 1^η «επιτυχία» σε ακολουθία ανεξάρτητων όμοιων πειραμάτων με πιθανότητα επιτυχίας p .

Άσκηση 11: Σε μία τηλεφωνική συνομιλία, κατά τη διάρκεια κάθε λεπτού υπάρχει μία πιθανότητα 0.05 να «πέσει» η γραμμή. Υποθέτουμε πως η συμπεριφορά της τηλεφωνικής γραμμής από λεπτό σε λεπτό είναι ανεξάρτητη.

A) Ποια είναι η πιθανότητα να «πέσει» η γραμμή για 1^η φορά κατά το 5^ο λεπτό της συνομιλίας;

B) Ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει πέσει η γραμμή κατά τα πρώτα 10 λεπτά της συνομιλίας;

Λύση: Έστω X Τ.Μ. που δείχνει σε ποιο λεπτό της συνομιλίας έπεσε η γραμμή. Η X ακολουθεί τη Γεωμετρική Κατανομή με παράμετρο επιτυχίας $p = 0.05$, αφού κάθε λεπτό αποτελεί ανεξάρτητη δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.05$ (εδώ «επιτυχία» σημαίνει να «πέσει» η γραμμή).

A) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X = 5) = (1 - 0.05)^4 \times 0.05 \approx 0.0407$$

B) Η γραμμή δεν θα «πέσει» τα πρώτα 10 λεπτά αν και μόνο αν έχουμε 10 «αποτυχίες» στη σειρά, δηλαδή:

$$P(X > 10) = (1 - 0.05)^{10} \approx 0.5987$$

Μέση Τιμή: $E[X] = \sum_x x p_X(x)$

Διασπορά: $VAR[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ	ΔΙΑΣΠΟΡΑ
Bernoulli	p	$p(1 - p)$
Διωνυμική	np	$np(1 - p)$
Poisson	λ	λ
Γεωμετρική	$\frac{1}{p}$	$\frac{1 - p}{p^2}$

Άσκηση 12: Ρίχνω ένα αμερόληπτο εξαέδρο ζάρι, και έστω Τ.Μ. X που αντιπροσωπεύει τον αριθμό που θα φέρει. Να υπολογιστούν τα:

A) $E[X]$

B) $VAR[X]$

Λύση: Εφ' όσον το ζάρι είναι αμερόληπτο, και τα 6 ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα εμφάνισης $\frac{1}{6}$.

$$A) E[X] = \sum_{x=1}^6 x p_X(x) = \sum_{x=1}^6 x \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή μιας διακριτής Τ.Μ. δεν είναι απαραίτητα μία από τις τιμές της.

$$B) E[X^2] = \sum_{x=1}^6 x^2 p_X(x) = \sum_{x=1}^6 x^2 \frac{1}{6} = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

$$\text{Άρα: } VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

Άσκηση 13: Έστω Τ.Μ. X με $E[X] = \mu$ και $VAR[X] = \sigma^2$. Αν $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, ν.δ.ο:

A) $E[Y] = 0$

B) $VAR[Y] = 1$

Λύση: Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της μέσης τιμής και της διασποράς, έχουμε:

$$A) E[Y] = E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{E[X-\mu]}{\sigma} = \frac{E[X]-\mu}{\sigma} = 0$$

$$B) VAR[Y] = VAR\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{VAR[X-\mu]}{\sigma^2} = \frac{VAR[X]}{\sigma^2} = 1$$

Άσκηση 14: Σε ένα παιχνίδι, ο παίχτης έχει τυχαίο κέρδος που παριστάνεται από την Τ.Μ. X η οποία παίρνει τις τιμές $\{-20, 0, 10\}$ με πιθανότητες $\{0.3, 0.1, 0.6\}$ αντίστοιχα. Να υπολογιστούν:

A) $E[X]$

B) $VAR[X]$

Λύση: Σύμφωνα με τους τύπους ορισμού της μέσης τιμής και της διασποράς, έχουμε:

$$A) E[X] = -20 \times 0.3 + 0 \times 0.1 + 10 \times 0.6 = -6 + 0 + 6 = 0$$

$$B) E[X^2] = (-20)^2 \times 0.3 + 0^2 \times 0.1 + 10^2 \times 0.6 = 400 \times 0.3 + 0 + 100 \times 0.6 = 120 + 60 = 180$$

$$\text{Άρα: } VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 180 - 0 = 180$$

Άσκηση 15: Μία Τ.Μ. X παίρνει τις τιμές $\{0, 1, 2, k\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \alpha\right\}$.

A) Να υπολογιστεί η πιθανότητα α

B) Αν $E[X] = \frac{8}{3}$, να βρεθεί η τιμή k

Γ) Με βάση τα ερωτήματα A) και B), να βρεθεί το $VAR[X]$

Λύση:

A) Θα πρέπει να ισχύει η Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\sum_x p_X(x) = 1 \rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \alpha = 1 \rightarrow \alpha = \dots = \frac{3}{10}$$

B) Δεδομένου του α που προσδιορίσαμε στο A) ερώτημα, έχουμε:

$$E[X] = \frac{8}{3} \rightarrow \sum_x x p_X(x) = \frac{8}{3} \rightarrow 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{3} + k \frac{3}{10} = \frac{8}{3} \rightarrow k = \dots = 6$$

$$\Gamma) E[X^2] = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 6^2 \frac{3}{10} = \dots = \frac{37}{3}$$

$$\text{Άρα: } VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{37}{3} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \dots = \frac{47}{9}$$

Άσκηση 16: Η θερμοκρασία μιας πόλης μοντελοποιείται ως μία Τ.Μ. με μέση τιμή και τυπική απόκλιση ίσες με 10°C . Μία ημέρα θεωρείται «κανονική» αν η θερμοκρασία κατά τη διάρκειά της κυμαίνεται εντός μίας τυπικής απόκλισης από τη μέση τιμή. Να υπολογιστεί η διακύμανση της θερμοκρασίας για μία «κανονική» ημέρα, αν η θερμοκρασία εκφραζόταν σε $^\circ\text{F}$ (δίνεται ότι η σχέση που συνδέει $^\circ\text{F} - ^\circ\text{C}$ είναι η εξής: $^\circ\text{F} = \frac{9}{5}^\circ\text{C} + 32$).

Έστω X η θερμοκρασία σε $^{\circ}\text{C}$. Τότε, η θερμοκρασία σε $^{\circ}\text{F}$ σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης θα είναι: $Y = \frac{9}{5}X + 32$.

Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της μέσης τιμής και της διασποράς, έχουμε:

$$E[Y] = E\left[\frac{9}{5}X + 32\right] = \frac{9}{5}E[X] + 32 = \frac{9}{5}10 + 32 = 50$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}[Y] &= \text{VAR}\left[\frac{9}{5}X + 32\right] = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \text{VAR}[X] = \left(\frac{9}{5}\right)^2 10^2 = \frac{81}{25}100 \\ &= 324 \end{aligned}$$

Άρα, η τυπική απόκλιση σε $^{\circ}\text{F}$ θα είναι:

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{324} = 18$$

Άρα, για μία «κανονική» μέρα, η θερμοκρασία σε $^{\circ}\text{F}$ θα βρισκόταν στο εξής διάστημα: $[E[Y] - \sigma_Y, E[Y] + \sigma_Y] = [32, 68]$.

Άσκηση 17: Έστω Τ.Μ. X που ακολουθεί Διωνυμική Κατανομή με $n = 10$. Να βρεθεί η διασπορά της Τ.Μ. $Y = 3X + 2$.

Λύση: Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της διασποράς, έχουμε:

$$\text{VAR}[Y] = \text{VAR}[3X + 2] = 3^2 \text{VAR}[X] = 9 \times np(1 - p) = 90p(1 - p)$$

Άσκηση 18: Έστω Τ.Μ. X που ακολουθεί την Κατανομή Poisson με $E[X] = 5$. Να βρεθεί το $E[X^2]$.

Λύση: Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι για την Κατανομή Poisson ισχύει: $E[X] = \text{VAR}[X] = \lambda = 5$. Εκμεταλλευόμενοι εκ νέου τις ιδιότητες της διασποράς, έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{VAR}[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \rightarrow E[X^2] = \text{VAR}[X] + (E[X])^2 \rightarrow E[X^2] \\ &= 5 + 5^2 = 5 + 25 = 30 \end{aligned}$$

Άσκηση 19: Έστω Τ.Μ. X που ακολουθεί Κατανομή Poisson. Αν $E[X] = 3$, να βρεθεί η μέση τιμή της Τ.Μ. $Y = (X - 2)^2$.

Λύση: Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι για την Κατανομή Poisson ισχύει: $E[X] = VAR[X] = \lambda = 3$. Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[(X - 2)^2] = E[X^2 - 4X + 4] = E[X^2] - 4E[X] + 4 \\ &= VAR[X] + (E[X])^2 - 4E[X] + 4 = \lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 4 = 3^2 - 3 \times 3 + 4 = 4 \end{aligned}$$

, όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση: $VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$.

Άσκηση 20: Ο Κώστας και ο Νίκο παίζουν το εξής παιχνίδι: Ο Νίκος θα ρίξει διαδοχικά 4 φορές ένα κέρμα με $P(\text{κορώνα}) = 0.4$. Πριν τις ρίψεις θα πρέπει να αποφασίσει μεταξύ 2 σταρτηγικών:

i) Να κερδίσει σε ευρώ ποσό X , ίσο με το πλήθος των «κ» (κορώνα) που θα φέρει

ii) Να κερδίσει σε ευρώ ποσό Y , ίσο με το τετραγωνο του πλήθους των «κ» που θα φέρει μειωμένο 1.5 φορές κατά τα ίδιο πλήθος

A) Ποια είναι η πιο συμφέρουσα σταρτηγική για το Νίκο; Δηλαδή, ποια στρατηγική μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος του;

B) Στη γενική περίπτωση, όπου η πιθανότητα να έρθει «κορώνα» είναι p , για ποιο εύρος τιμών του p είναι πιο συμφέρουσα η στρατηγική i) από τη στρατηγική ii);

Λύση: Έστω X Τ.Μ. που απεικονίζει το πλήθος των «κ» σε 4 ρίψεις του κέρματος. Η πιθανότητα «επιτυχίας» (να έρθει «κ») σε 4 διαδοχικές ρίψεις είναι 0.4, σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης. Άρα η X ακολουθεί Διωνυμική Κατανομή με $n = 4$ και $p = 0.4$. Ως εκ τούτου, η ΣΜΠ της θα είναι η εξής:

$$p_X(k) = \binom{4}{k} (0.4)^k (0.6)^{4-k}, k = 0, 1, \dots$$

A) Σύμφωνα με την στρατηγική i), το κέρδος του Νίκου θα είναι X .

Σύμφωνα με τη στρατηγική ii), το κέρδος του Νίκου θα είναι $Y = X^2 - 1.5X$. Προσδιορίζουμε την μεση τιμή του κέρδους σε κάθε περίπτωση, ώστε ν' αποφασίσουμε ποια στρατηγική είναι η πιο συμφέρουσα:

$$E[X] = np = 4 \times 0.4 = 1.6$$

$$\begin{aligned}
E[Y] &= E[X^2 - 1.5X] = E[X^2] - 1.5E[X] \\
&= \text{VAR}[X] + (E[X])^2 - 1.5E[X] \\
&= np(1-p) + (np)^2 - 1.5np \\
&= 4 \times 0.4 \times 0.6 + (4 \times 0.4)^2 - 1.5 \times 4 \times 0.4 \\
&= 0.96 + 2.56 - 2.4 = 1.12
\end{aligned}$$

, όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $\text{VAR}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$.

Παρατηρούμε ότι $E[X] > E(Y)$, και ως εκ τούτου η στρατηγική i) είναι η πιο συμφέρουσα για το Νίκο.

Β) Ακολουθώντας παρόμοιο σκεπτικό με το Α) ερώτημα, η στρατηγική i) είναι συμφερότερη από τη ii) αν ισχύει $E[X] > E(Y)$. Θα επιλύσουμε την παραπάνω ανισότητα, ώστε να βρούμε το ζητούμενο εύρος τιμών της πιθανότητας «επιτυχίας» p .

$$\begin{aligned}
E[X] > E(Y) &\rightarrow E[X] > \text{VAR}[X] + (E[X])^2 - 1.5E[X] \rightarrow np \\
&> np(1-p) + (np)^2 - 1.5np \rightarrow 2.5np \\
&> np - np^2 + n^2p^2 \rightarrow 1.5np > np^2(n-1) \\
&\rightarrow 1.5p - p^2(n-1) > 0 \rightarrow \frac{3}{2}p + p^2(1-n) \\
&> 0 \xrightarrow{n=4} \frac{3}{2}p + p^2(1-4) > 0 \rightarrow \frac{3}{2}p - 3p^2 > 0 \\
&\rightarrow 3p\left(\frac{1}{2} - p\right) > 0 \xrightarrow{p>0} \frac{1}{2} - p > 0 \rightarrow p < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, το ζητούμενο εύρος τιμών της πιθανότητας επιτυχίας p θα είναι: $0 < p < \frac{1}{2}$.