

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 5
Συνδυαστική Ανάλυση και Εισαγωγή στις Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές
Επιμέλεια: Κωνσταντίνα Φωτιάδου

Άσκηση 1.

Εκατό φοιτητές, συμπεριλαμβανομένου του Κώστα και της Ελένης, πρόκειται να χωριστούν σε τέσσερις τάξεις ίδιου μεγέθους και αυτό θα γίνει με τυχαίο τρόπο.

Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Κώστας και η Ελένη θα καταλήξουν στην ίδια τάξη;

Λύση.

Εφόσον δε μας ενδιαφέρει η σειρά θα πρέπει κατευθείαν να σκεφτούμε ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε συνδυασμούς για να βρούμε το ζητούμενο.

Έστω ότι έχουμε τέσσερις τάξεις των 25 φοιτητών, τις Α, Β, Γ, Δ.

Η πιθανότητα να βρίσκονται ο Κώστας και η Ελένη μαζί σε μια συγκεκριμένη τάξη αναλύεται λοιπόν ως:

$$\frac{\text{πλήθος συνδυασμών που περιέχουν τον Κώστα και την Ελένη π.χ. στην τάξη Α}}{\text{συνολικό πλήθος συνδυασμών 100 φοιτητών σε τάξεις των 25 φοιτητών}} \quad (1)$$

Tip: Σε τέτοιου είδους ασκήσεις αρχικά σκεφτόμαστε τις περιπτώσεις για να πραγματοποιηθεί το ζητούμενο ενδεχόμενο και στη συνέχεια χωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε υποσύνολα, στα οποία τέλος μετράμε το πλήθος των συνδυασμών.

Στην προκειμένη χωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε ένα υποσύνολο που περιέχει τον Κώστα και την Ελένη και σε ένα άλλο που περιέχει τους υπόλοιπους 98 φοιτητές. Από το πρώτο σύνολο διαλέγουμε και τους 2, ενώ από το δεύτερο τους υπόλοιπους 23 για να συμπληρωθεί η τάξη των 25.

$$(1) \Rightarrow \frac{\binom{2}{2} \binom{98}{23}}{\binom{100}{25}}$$

Καθώς υπάρχουν 4 συνολικά τάξεις, η πιθανότητα να βρίσκονται ο Κώστας και η Ελένη μαζί σε κάποια από αυτές θα είναι τελικά

$$4 \frac{\binom{2}{2} \binom{98}{23}}{\binom{100}{25}} = 4 \frac{1 \frac{98!}{(98-23)! 23!}}{\frac{100!}{(100-25)! 25!}} = 4 \frac{98! 25!}{75! 23!} = 4 \frac{24 \cdot 25}{99 \cdot 100} = \frac{24}{99}$$

Εναλλακτικά και πιο εύκολα:

Τοποθετούμε τον Κώστα σε μια συγκεκριμένη τάξη με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Για την Ελένη υπάρχουν 99 πιθανές τοποθετήσεις από τις οποίες μόνον οι 24 τη βάζουν στην ίδια τάξη με τον Κώστα. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα (να μπουν μαζί σε οποιαδήποτε τάξη) είναι $4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{99} = \frac{24}{99}$.

Άσκηση 2.

Η Αλίκη και ο Βασίλης παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι. Πρώτα η Αλίκη επιλέγει τυχαία 4 από τα 52 φύλλα μίας τράπουλας, τα απομνημονεύει και τα επανατοποθετεί πίσω στην τράπουλα. Ύστερα, ο Βασίλης επιλέγει τυχαία 8 φύλλα από την ίδια τράπουλα. Η Αλίκη κερδίζει εάν στα φύλλα που τράβηξε ο Βασίλης περιέχονται τα 4 δικά της.

Με ποια πιθανότητα κερδίζει η Αλίκη ;

Λύση.

Χωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε ένα υποσύνολο που περιέχει τα 4 φύλλα της Αλίκης και σε ένα άλλο που περιέχει τα υπόλοιπα 48 φύλλα της τράπουλας. Για να κερδίσει η Αλίκη, θα πρέπει ο Βασίλης να επιλέξει και τα 4 φύλλα από το πρώτο σύνολο. Εφόσον τα 4 φύλλα της Αλίκης είναι συγκεκριμένα, ο Βασίλης πρέπει να διαλέξει επιπλέον 4 οποιαδήποτε φύλλα από το δεύτερο σύνολο. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των δυνατών συνδυασμών φύλλων του Βασίλη στους οποίους περιλαμβάνονται τα 4 φύλλα της Αλίκης είναι $\binom{4}{4}\binom{48}{4}$. Το συνολικό πλήθος των τρόπων με τους οποίους ο Βασίλης μπορεί να διαλέξει οποιαδήποτε 8 φύλλα από τα 52 της τράπουλας είναι $\binom{52}{8}$.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{4}{4}\binom{48}{4}}{\binom{52}{8}} = 0.0259\%.$$

Άσκηση 3.

Υπάρχουν τρεις τάξεις, καθεμία με n μαθητές. Από το σύνολο των $3n$ μαθητών πρέπει να επιλέξουμε τρεις.

(α') Πόσες επιλογές είναι δυνατές ;

(β') Πόσες επιλογές είναι δυνατές αν και οι τρεις μαθητές ανήκουν στην ίδια τάξη ;

(γ') Πόσες επιλογές είναι δυνατές αν δύο από τους τρεις μαθητές ανήκουν στην ίδια τάξη και ο τρίτος σε διαφορετική τάξη ;

(δ') Πόσες επιλογές είναι δυνατές αν και οι τρεις μαθητές ανήκουν σε διαφορετικές τάξεις ;

Λύση.

(α') Οι δυνατές επιλογές ισούνται με το συνδυασμό των $3n$ ανά 3, δηλαδή

$$\binom{3n}{3}$$

(β') Θα πρέπει να διαλέξουμε μια από τις τρεις τάξεις και τρεις από τους n μαθητές που θα βρίσκονται στην επιλεγμένη τάξη. Οπότε οι δυνατές επιλογές θα ισούνται με

$$\binom{3}{1}\binom{n}{3} = 3\binom{n}{3}$$

(γ') Θα πρέπει να διαλέξουμε μια από τις τρεις τάξεις και δύο από τους n μαθητές αυτής της τάξης. Έπειτα, θα πρέπει να διαλέξουμε μια από τις εναπομείνουσες δύο τάξεις και έναν από τους n μαθητές της. Οπότε οι δυνατές επιλογές θα ισούνται με

$$\begin{aligned}
\binom{3}{1} \binom{n}{2} \binom{2}{1} \binom{n}{1} &= \frac{3!}{2!1!} \frac{n!}{(n-2)!2!} \frac{2!}{1!1!} \frac{n!}{(n-1)!1!} \\
&= \frac{2!3}{2!} \frac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!2!} 2 \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} \\
&= 3 \frac{n(n-1)}{2} 2n \\
&= 3n^2(n-1)
\end{aligned}$$

(δ') Από κάθε τάξη διαλέγουμε έναν από τους n μαθητές. Οπότε οι δυνατές επιλογές θα ισούνται με

$$\binom{n}{1} \binom{n}{1} \binom{n}{1} = n \cdot n \cdot n = n^3$$

Άσκηση 4.

- (α') Με πόσους τρόπους μπορούν 3 αγόρια και 3 κορίτσια να καθίσουν σε μια σειρά;
- (β') Με πόσους τρόπους μπορούν 3 αγόρια και 3 κορίτσια να καθίσουν σε μια σειρά αν τα αγόρια πρέπει να κάθονται όλα μαζί και τα κορίτσια πρέπει να κάθονται όλα μαζί;
- (γ') Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν αν μόνο τα αγόρια πρέπει να κάθονται όλα μαζί;
- (δ') Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν αν δεν επιτρέπεται να κάθονται μαζί παιδιά του ίδιου φύλλου;

Λύση.

Μας ενδιαφέρει η σειρά, άρα χρησιμοποιούμε διατάξεις/μεταθέσεις n στοιχείων ανά k

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(α') Διατάξεις/Μεταθέσεις των 6 ανά 6, άρα

$$P(6, 6) = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!} = 720$$

(β') Αν δούμε τα αγόρια ως μία ομάδα και τα κορίτσια ως μια άλλη ομάδα, αυτές οι δύο ομάδες $\{A, K\}$ μπορούν να μπουν σε μια σειρά με 2 διαφορετικούς τρόπους: AK, KA (2! τρόποι).
Ακόμα, τα αγόρια μπορούν να κάθονται όλα μαζί με μεταθέσεις των 3: $P(3, 3) = 3!$ τρόπους.
Ομοίως και τα κορίτσια.
Έτσι συνολικά έχουμε $2 \times 3! \times 3! = 72$ τρόπους για να γίνει το ζητούμενο.

(γ') Αν δούμε τα αγόρια ως μια ομάδα A και τα κορίτσια μεμονωμένα, τότε έχουμε $P(4, 4) = 4!$ μεταθέσεις (ως προς το που θα καθίσουν όλα μαζί τα αγόρια σε σχέση με τα κορίτσια, αλλά και το πώς θα καθίσουν τα κορίτσια μεταξύ τους). Επίσης, στην ομάδα των αγοριών έχουμε $P(3, 3) = 3!$ μεταθέσεις για να κάθονται όλα μαζί.
Έτσι συνολικά έχουμε $3! \times 4! = 144$ τρόπους για να κάτσουν τα αγόρια μόνο μαζί.

(δ') Για την πρώτη θέση υπάρχουν 6 επιλογές (έστω π.χ. ότι ξεκινάμε με αγόρι), για τη δεύτερη υπάρχουν 3 επιλογές από το άλλο φύλλο/σύνολο (κορίτσια), για την τρίτη θέση 2 επιλογές από το εναλλάξ σύνολο (αγόρια), για την τέταρτη 2 επιλογές από το εναλλάξ φύλλο (κορίτσια), για την πέμπτη 1 επιλογή όπως και για την έκτη θέση.
Άρα συνολικά υπάρχουν $6 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 72$ τρόποι να κάτσουν άτομα διαφορετικού φύλλου δίπλα δίπλα.

Άσκηση 5.

Πόσες διαφορετικές πινακίδες κυκλοφορίας οχημάτων επτά χαρακτήρων υπάρχουν αν στις δύο πρώτες θέσεις τοποθετηθούν γράμματα και στις υπόλοιπες πέντε θέσεις τοποθετηθούν αριθμοί; Επαναλάβετε για την περίπτωση που δεν επιτρέπεται η επανάληψη γράμματος ή αριθμού στην πινακίδα.

Λύση.

- Με επανάληψη γραμμάτων ή αριθμών

Χρησιμοποιούμε τη βασική αρχή της απαρίθμησης

Γ : #14 - Α, Β, Ε, Ζ, Η, Ι, Κ, Μ, Ν, Ο, Ρ, Τ, Υ, Χ (Μόνο τα 14 γράμματα της Ελληνικής που ανήκουν και στο Λατινικό αλφάβητο)

Α : #10 - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Έτσι, οι διαφορετικές πινακίδες είναι

$$14 \times 14 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 19.600.000$$

- Χωρίς επανάληψη γραμμάτων ή αριθμών

Στη θέση του πρώτου γράμματος μπορούν να μπουν όλα τα πιθανά γράμματα, 14 στο πλήθος. Στη θέση του 2ου γράμματος μόνο τα 13 εναπομείναντα για να μην έχουμε επανάληψη. Αντίστοιχα, στην πρώτη θέση για αριθμό έχουμε 10 επιλογές, στη δεύτερη 9 κτλ.

Έτσι, οι διαφορετικές πινακίδες σε αυτήν την περίπτωση είναι

$$14 \times 13 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 5.503.680$$

Εδώ θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τον τύπο για διατάξεις/μεταθέσεις:

$$P(14, 2) \times P(10, 5) = \frac{14!}{2!} \times \frac{10!}{5!} = \frac{12! \cdot 13 \cdot 14}{12!} \times \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 14 = 5.503.680$$

Άσκηση 6.

Τραβάμε 7 χαρτιά από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Βρείτε την πιθανότητα:

(α) Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους.

(β) Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες.

(γ) Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους ή 2 βαλέδες.

Λύση.

Ορίζουμε τα γεγονότα:

$A = \{\text{Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους}\}$

$B = \{\text{Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες}\}$

(α) Υπάρχουν $\binom{52}{7}$ διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε 7 χαρτιά από μία τράπουλα, με 52 χαρτιά. Πρέπει να επιλέξουμε 3 από τους 4 άσσους, και οποιαδήποτε 4 από τα υπόλοιπα 48 χαρτιά. Συνολικά αυτό γίνεται με $\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{4}$ διαφορετικούς τρόπους. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{4}}{\binom{52}{7}} = \frac{\frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot \frac{48!}{4!(48-4)!}}{\frac{52!}{7!(52-7)!}}$$

(β) Ομοίως, η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5}}{\binom{52}{7}} = \frac{\frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{48!}{5!(48-5)!}}{\frac{52!}{7!(52-7)!}}$$

(γ) Υπολογίζουμε την πιθανότητα:

$$P(\text{"Ακριβώς 3 άσσους ή 2 βαλέδες"}) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{4}}{\binom{52}{7}} + \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5}}{\binom{52}{7}} - \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{2}}{\binom{52}{7}}$$

Θεωρία.

Μια τ.μ. λέγεται **διακριτή** αν το πεδίο τιμών της είναι πεπερασμένο ή άπειρα αριθμήσιμο.

Π.χ. Έστω το πείραμα όπου διαλέγουμε τυχαία σημείο $a \in [-1, 1]$.

Τότε η τ.μ. a^2 δεν είναι διακριτή, ενώ η τ.μ.

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases} \quad \text{είναι διακριτή.}$$

Θέλουμε να χαρακτηρίσουμε μία τ.μ. μέσω των πιθανοτήτων των τιμών που μπορεί να λάβει:

Αν x είναι μία τιμή της τ.μ. X , η **πιθανότητα μάζας** probability mass PMF του x ορίζεται ως:

$$p_X(x) = P(\{X = x\})$$

όπου το γεγονός $\{X = x\}$ αποτελείται από όλα τα απλά ενδεχόμενα που συντελούν στο να πάρει η τ.μ. X την τιμή x . Η PMF αναφέρεται ως **κατανομή**.

Σύμβαση:

- Με X, Y, Z κ.τ.λ. συμβολίζουμε τ.μ. ενώ με x, y, z κ.τ.λ. συμβολίζουμε αριθμητικές τιμές τις οποίες παίρνουν οι τ.μ.
- Επίσης, πολλές φορές γράφουμε $P(X = x)$ αντί $P(\{X = x\})$

Υπολογισμός της PMF μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X .

Για κάθε δυνατή τιμή x της τ.μ. X :

1. Συγκεντρώνουμε όλα τα δυνατά απλά αποτελέσματα που συντελούν στο γεγονός $\{X = x\}$.
2. Προσθέτουμε τις πιθανότητες τους για να πάρουμε την τιμή $p_X(x)$.

Άσκηση 7.

Το πείραμά μας συνίσταται στη ρίψη 3 τίμιων κερμάτων. Συμβολίζουμε με Y τον αριθμό που μας λέει πόσες φορές εμφανίστηκε κορώνα. Να βρεθούν οι τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή Y και να υπολογισθεί η συνάρτηση πιθανότητάς της.

Λύση.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$K = \{\text{Έρχεται Κορώνα}\}$, με αντίστοιχη πιθανότητα $P(K) = 1/2$

$G = \{\text{Έρχεται Γράμματα}\}$, με αντίστοιχη πιθανότητα $P(G) = 1/2$

Η τ.μ Y παίρνει τιμές $\{0, 1, 2, 3\}$, καθώς μπορεί να εμφανισθεί κορώνα από 0–3 φορές συνολικά.

$$P_Y(0) = P\{Y = 0\} = P(\{\Gamma, \Gamma, \Gamma\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$P_Y(1) = P\{Y = 1\} = P(\{K, \Gamma, \Gamma\}) + P(\{\Gamma, K, \Gamma\}) + P(\{\Gamma, \Gamma, K\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8},$$

$$P_Y(2) = P\{Y = 2\} = P(\{K, K, \Gamma\}) + P(\{K, \Gamma, K\}) + P(\{\Gamma, K, K\}) = \frac{3}{8},$$

$$P_Y(3) = P\{Y = 3\} = P(\{K, K, K\}) = \frac{1}{8}$$

Επομένως, η συνάρτηση πιθανότητας γίνεται :

$$\text{PMF:} \quad p_X(x) = \begin{cases} 1/8, & y = 0 \text{ ή } y = 3 \\ 3/8, & y = 1 \text{ ή } y = 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$