

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 4
Επιμέλεια: Μαρία Άσπρη

Άσκηση 1.

Το κουτί 1 περιέχει 1 άσπρη και 999 κόκκινες μπάλες. Το κουτί 2 περιέχει 1 κόκκινη και 999 άσπρες μπάλες. Μια μπάλα επιλέγεται τυχαία από ένα κουτί. Αν η μπάλα είναι κόκκινη ποια είναι η πιθανότητα να προέρχεται από το κουτί 1;

Λύση.

Έστω τα ενδεχόμενα:

B_1 : μπάλες στο κουτί 1

B_2 : μπάλες στο κουτί 2

K : κόκκινες μπάλες

Από υπόθεση έχουμε:

$$P(B_1) = P(B_2) = 0.5$$

$$P(K|B_1) = 0.999$$

$$P(K|B_2) = 0.001$$

Από νόμο του Bayes έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B_1|K) &= \frac{P(K|B_1)P(B_1)}{P(K)} \\ &= \frac{P(K|B_1)P(B_1)}{P(K|B_1)P(B_1) + P(K|B_2)P(B_2)} \\ &= \frac{0.999}{0.999 + 0.001} = 0.999 \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Ρίχνουμε ανεξάρτητα δύο δίκαια εξάεδρα ζάρια. Ορίζουμε τα γεγονότα:

$A = \{\text{Το πρώτο ζάρι φέρνει: } 1, 2, \text{ ή } 3\}$, $B = \{\text{Το δεύτερο ζάρι φέρνει: } 2, 3, \text{ ή } 6\}$, και $C = \{\text{Το άθροισμα των δύο ρίψεων} = 9\}$.

(α) Δείξτε ότι $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$;

(β) Είναι τα A , B , και C ανεξάρτητα;

Λύση.

(α) Επειδή τα ζάρια είναι δίκαια και τα πειράματα εκτελούνται ανεξάρτητα, η πιθανότητα να προκύψει οποιοδήποτε ζευγάρι είναι $1/36$, και

$$P(A) = 1/2, \quad P(B) = 1/2, \quad P(C) = 1/9$$

καθώς $A \cap B \cap C = \{(3, 6)\}$, $P(A \cap B \cap C) = 1/36 = P(A)P(B)P(C)$.

(β) Ισχύει:

$$A \cap B = \{\text{Πρώτο και δεύτερο ζάρι} = 2 \text{ ή } 3\} = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

Συνεπώς:

$$P(A \cap B) = 1/9 \neq 1/4 = P(A)P(B)$$

άρα τα A , B , και C δεν είναι ανεξάρτητα!

Άσκηση 3.

Η Σοφία περνά μπροστά από ένα κουτί που περιέχει δύο ειδών σοκολάτες: ION γάλακτος και ION αμυγδάλου. Στο κουτί υπάρχουν τρεις φορές περισσότερες ION γάλακτος από ION αμυγδάλου. Η Σοφία επιλέγει μία σοκολάτα στην τύχη. Αν επιλέξει μία ION γάλακτος, την τρώει με πιθανότητα $1/5$. Αν επιλέξει μία ION αμυγδάλου, την τρώει με πιθανότητα $2/5$.

(α) Με ποια πιθανότητα η Σοφία τρώει τη σοκολάτα που επέλεξε;

(β) Δεδομένου ότι η Σοφία έφαγε τη σοκολάτα, ποια είναι η πιθανότητα ότι αυτή ήταν μία ION αμυγδάλου;

Λύση.

Ορίζουμε τα γεγονότα:

$B = \{\text{Η Σοφία τρώει τη σοκολάτα}\}$

$A = \{\text{Η σοκολάτα είναι ION γάλακτος}\}$

$A^c = \{\text{Η σοκολάτα είναι ION αμυγδάλου}\}$

Από την εκφώνηση έχουμε ότι $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(A^c) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{5}$, $P(B|A^c) = \frac{2}{5}$

(α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4} = 0.25$$

(β) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes:

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c) \cdot P(B|A^c)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Άσκηση 4.

Ένα τετράεδρο έχει τις 4 πλευρές του βαμμένες ως εξής:

Μία πλευρά είναι βαμμένη όλη κόκκινη, μία είναι μπλε, μία μαύρη και η τελευταία είναι βαμμένη κόκκινη, μπλε και μαύρη. Ρίχνουμε το τετράεδρο και η πιθανότητα μία οποιαδήποτε πλευρά του να ακουμπάει στο πάτωμα είναι ίση με $\frac{1}{4}$. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

$R = \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το κόκκινο χρώμα}\}$

$B = \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το μαύρο χρώμα}\}$

$BL = \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το μπλε χρώμα}\}$

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες των γεγονότων R , B και BL .

(β) Είναι τα γεγονότα R , B και BL ανά δύο ανεξάρτητα;

(γ) Είναι τα γεγονότα R , B και BL ανεξάρτητα;

Λύση.

(α) Προφανώς, $P(R) = P(B) = P(BL) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, καθώς 2 στις 4 πλευρές του τετράεδρου περιέχουν κόκκινο, μπλε ή μαύρο χρώμα.

(β) Σαφώς, $P(BL \cap R) = \frac{1}{4}$, $P(B \cap BL) = \frac{1}{4}$, $P(B \cap R) = \frac{1}{4}$, διότι μόνο η τέταρτη πλευρά περιέχει ταυτόχρονα 2 χρώματα. Καθώς:

$$P(BL \cap R) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(BL)P(R)$$

$$P(BL \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(BL)P(B)$$

$$P(B \cap R) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B)P(R)$$

τα γεγονότα R , BL , B είναι ανεξάρτητα ανά δύο.

(γ)

$$P(BL \cap R \cap B) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(BL)P(R)P(B)$$

Συνεπώς, τα γεγονότα R , BL , B ΔΕΝ είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 5.

Μία ασφαλιστική εταιρία κατατάσσει τους ανθρώπους σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την επικινδυνότητα τους στην οδήγηση: Κατηγορία μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου. Τα αρχεία της εταιρίας δείχνουν ότι οι πιθανότητες πελάτες μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου να έχουν ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι 0.05, 0.15 και 0.30, αντίστοιχα. Αν το 20% του πληθυσμού αποτελείται από άτομα μικρού ρίσκου, το 50% αποτελείται από άτομα μέτριου ρίσκου και το υπόλοιπο 30% αποτελείται από άτομα μεγάλου ρίσκου, ποιο ποσοστό του πληθυσμού έχει ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους; Αν κάποιος ασφαλισμένος δεν είχε κανένα ατύχημα το 2012, ποια η πιθανότητα ότι είναι άτομο

(α) μικρού ρίσκου;

(β) μέτριου ρίσκου;

Λύση. Έστω G το γεγονός κάποιος να είναι καλός οδηγός, M να είναι μέτριος και B κακός. Αν A το γεγονός κάποιος να είχε ατύχημα, τότε

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A|G)P(G) + P(A|M)P(M) + P(A|B)P(B) \\&= (0.05) * (0.2) + (0.15)(0.5) + (0.3)(0.3) = 0.175\end{aligned}$$

(α)

$$P(G|A^c) = \frac{P(A^c|G)P(G)}{P(A^c)} = \frac{0.95 * 0.2}{0.825} = 0.23.$$

(β)

$$P(M|A^c) = \frac{P(A^c|M)P(M)}{P(A^c)} = \frac{0.85 * 0.5}{0.825} = 0.51.$$