

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2016-2017

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

3ο Φροντιστήριο

Επιμέλεια: Φωτιάδου Κωνσταντίνα

Άσκηση 1.

Έστω A, B , 2 γεγονότα. Χρησιμοποιήστε τα αξιώματα των πιθανοτήτων για να αποδείξετε τα παρακάτω:

(α) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

(β) Δείξτε ότι η πιθανότητα μόνο ένα από τα γεγονότα A, B , να συμβεί είναι ίση με $P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$

Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \end{aligned}$$

Όμως ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} A \cup B &\subseteq \Omega \Leftrightarrow P(A \cup B) \leq P(\Omega) \Leftrightarrow \\ P(A) + P(B) - P(A \cap B) &\leq 1 \Leftrightarrow \\ P(A) + P(B) - 1 &\leq P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ P(A \cap B) &\geq P(A) + P(B) - 1 \end{aligned}$$

(β) Το ενδεχόμενο να πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B είναι: $(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$
Επομένως, η αντίστοιχη πιθανότητα γίνεται:

$$P[A \text{ ή } B \text{ αλλά όχι και τα 2}] = P(A^c \cap B) + P(A \cap B^c)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι το ενδεχομένο B μπορεί να γραφεί ως:

$$B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$$

Επίσης, ισχύει ότι: $(A^c \cap B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ Οπότε, μέσω του αξιώματος της πρόσθεσης έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A^c \cap B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Συμμετρικά έχουμε:

$$P(B^c \cap A) = P(A) - P(A \cap B)$$

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$\begin{aligned} P[A \text{ ή } B \text{ αλλά όχι και τα 2}] &= P(A^c \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B) \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Υπολογίστε την πιθανότητα: $P[A \cup (B^c \cup C^c)^c]$ σε κάθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) Τα ενδεχόμενα A, B, C είναι ξένα μεταξύ τους, και ισχύει: $P(A) = 3/7$

(β) $P(A) = 1/2, P(B \cap C) = 1/3, P(A \cap C) = 0$

(γ) $P[A^c \cap (B^c \cup C^c)] = 0.65$

Λύση

(α) Εφόσον τα A, B, C είναι ξένα μεταξύ τους ισχύει:

$$P(B \cap C) = 0, P(A \cap B) = 0, P(A \cap C) = 0, P(A \cap B \cap C) = 0$$

Από τους τύπους *De Morgan* επίσης έχουμε: $(B^c \cup C^c)^c = B \cap C$.

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P[A \cup (B^c \cup C^c)^c] = P[A \cup (B \cap C)] = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C)) = 3/7$$

(β) Από τους τύπους *De Morgan* έχουμε: $(B^c \cup C^c)^c = B \cap C$.

Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P[A \cup (B^c \cup C^c)^c] = P[A \cup (B \cap C)] = P(A) + P(B \cap C) - P[A \cap (B \cap C)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

(γ) Δίνεται ότι: $P[A^c \cap (B^c \cup C^c)] = 0.65$

Από τους τύπους *De Morgan* έχουμε: $[A^c \cap (B^c \cup C^c)]^c = A \cup (B^c \cup C^c)^c$.

Όμως ισχύει ότι:

$$P[A \cup (B^c \cup C^c)^c] = 1 - P[A^c \cap (B^c \cup C^c)] = 1 - 0.65 = 0.35$$

Άσκηση 3.

Από τους μαθητές μια τάξης, 60% είναι διάνοιες, 70% είναι ΑΕΚ, ενώ 25% δεν ανήκουν σε καμία κατηγορία. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ένας τυχαίος επιλεγμένος μαθητής είναι διάνοια ή ΑΕΚ αλλά όχι και τα δύο;

Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

G : "Ο μαθητής είναι διάνοια"

C : "Ο μαθητής είναι ΑΕΚ", με αντίστοιχες πιθανότητες $P(G) = 0.6, P(C) = 0.7$ και $P(G^c \cap C^c) = 0.25$.

Επομένως, ψάχνουμε την πιθανότητα: $P[(G \cap C^c) \cup (C \cap G^c)]$.

Η πιθανότητα ένας τυχαίος επιλεγμένος μαθητής να είναι ΑΕΚ ή διάνοια είναι:

$$\begin{aligned} P(G \cup C) &= P(G) + P(C) - P(G \cap C) = 1 - P[G^c \cap C^c] \Leftrightarrow \\ &0.6 + 0.7 - P(G \cap C) = 1 - P[G^c \cap C^c] \Leftrightarrow \\ P(G \cap C) &= 0.6 + 0.7 + 0.25 - 1 \Leftrightarrow P(G \cap C) = 0.55 \end{aligned}$$

Όμως, η πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου G μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$P(G) = P(G \cap C) + P(G \cap C^c) \quad (1)$$

Επομένως, έχουμε:

$$P(G \cap C^c) = P(G) - P(G \cap C) = 0.6 - 0.55 = 0.05$$

Συμμετρικά, για το ενδεχόμενο C έχουμε:

$$P(C \cap G^c) = P(C) - P(G \cap C) = 0.7 - 0.55 = 0.25$$

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$\begin{aligned} P[(G \cap C^c) \cup (C \cap G^c)] &= P((G \cap C^c)) + P((C \cap G^c)) - P[(G \cap C^c) \cap (C \cap G^c)] \\ &= 0.05 + 0.15 = 0.2 \end{aligned}$$

Η πιθανότητα: $P[(G \cap C^c) \cap (C \cap G^c)] = 0$, καθώς τα ενδεχόμενα $(G \cap C^c)$ και $(C \cap G^c)$ είναι ξένα μεταξύ τους.

Άσκηση 4.

Μια κότα θέλει να διασχίσει το δρόμο, αλλά φοβάται ότι θα την πατήσουν αυτοκίνητα. Ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσει. Αν φέρει γράμματα, δε διασχίζει το δρόμο, ενώ αν φέρει κεφαλή, ρίχνει άλλες δύο φορές ώστε να αποφασίσει. Αν οι επόμενες δύο ρίψεις φέρουν κεφαλή, διασχίζει, διαφορετικά παραμένει ακίνητη.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η κότα δε διασχίζει το δρόμο.

(β) Δεδομένου ότι η κότα δε διασχίζει το δρόμο, ποια είναι η πιθανότητα ότι στη πρώτη ρίψη έφερε γράμματα;

(γ) Δεδομένου ότι δε διασχίζει το δρόμο, ποια είναι η πιθανότητα ότι στη πρώτη ρίψη έφερε κεφαλή;

Λύση

Για $i = \{1, 2, 3\}$ ορίζουμε τα γεγονότα:

H_i : Στην i -οστή ρίψη φέρνει κεφαλή.

T_i : Στην i -οστή ρίψη φέρνει γράμματα.

D : Δε διασχίζει το δρόμο.

(α) Η πιθανότητα του να μη διασχίσει το δρόμο γίνεται:

$$P(D) = P[(H_1 \cdot H_2 \cdot H_3)^c] = 1 - P(H_1 \cdot H_2 \cdot H_3) = 1 - P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8},$$

Η σχέση $P(H_1 \cdot H_2 \cdot H_3) = P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3)$, ισχύει λόγω ανεξαρτησίας των γεγονότων H_1, H_2, H_3 .

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(T_1/D) = \frac{P(T_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(T_1)}{P(D)} = \frac{1/2}{7/8} = \frac{4}{7}$$

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(H_1/D) = 1 - P(H_1^c/D) = 1 - P(T_1/D) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

Άσκηση 5.

Έστω ο αριθμήσιμα άπειρος δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες απλών ενδεχομένων: $P(n) = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$.

(α) Να αποδειχθεί ότι αυτός ο νόμος των πιθανοτήτων ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα: $P(\Omega) = 1$

(β) Να υπολογισθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

(i) $A = \{2, 3, 4\}$

(ii) $B = \{1, 3, 5, \dots\}$

(iii) $C = \{2, 4, 6, \dots\}$

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{i\}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

(β)

(i) Θεωρούμε το ενδεχόμενο: $A = \{2, 3, 4\}$

Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(A) = P(\{2, 3, 4\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{7}{16}$$

(ii) Θεωρούμε το ενδεχόμενο: $B = \{1, 3, 5, \dots\}$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου B γίνεται:

$$P(B) = P(\{1, 3, 5, \dots\}) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\{2i+1\}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(2i+1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}$$

(iii) Θεωρούμε το ενδεχόμενο: $C = \{2, 4, 6, \dots\}$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου C γίνεται:

$$P(C) = P(\{2, 4, 6, \dots\}) = 1 - P(B) = 1 - P(\{1, 3, 5, \dots\}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$