ΗΥ-217 ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 2

Επιμέλεια: Κατερίνα Καραγιαννάκη

Άσκηση 1

Ένα κουτί περιέχει 3 μπάλες, 1 κόκκινη, 1 πράσινη και 1 μπλε. Θεωρείστε ένα πείραμα κατά το οποίο παίρνουμε μία μπάλα από το κουτί, την επανατοποθετούμε στο κουτί και τραβάμε μια δεύτερη μπάλα από το κουτί.

(α) Περιγράψτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

(β) Επαναλάβετε τραβώντας τη 2η μπάλα χωρίς την επανατοποθέτηση της 1ης.

Λύση

Έστω r: κόκκινη, g: πράσινη, b: μπλε. Έχουμε

(α) $S = \{(r,r),(r,g),(r,b),(g,r),(g,g),(g,b),(b,r),(b,g),(b,b)\}$

(β) $S = \{(r,g),(r,b),(g,r),(g,b),(b,r),(b,g)\}$

Άσκηση 2

Ρίχνουμε 2 ζάρια. Έστω A το γεγονός ότι το άθροισμα των ζαριών είναι άρτιο, B το γεγονός ότι σε μια ρίψη έχουμε φέρει τουλάχιστον έναν άσσο και C το γεγονός ότι το άθροισμα των ζαριών είναι 4. Να υπολογισθούν τα ενδεχόμενα.

(α) AB

(β) $A \cup B$

(γ) AB^c

(δ) ABC

Λύση

Ισχύουν τα παρακάτω:

$A = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),$
$(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

$B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$

$C = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

Έχουμε:

(α) $AB = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (5,1)\}$

(β) $A \cup B$: Συμβαίνει όταν το άθροισμα των ζαριών είναι άρτιο ή όταν τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια προσγειώνεται στον άσσο.

$A \cup B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,1), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,1), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

(γ) AB^c: Συμβαίνει όταν κανένα από τα δύο ζάρια δεν προσγειώνεται στον άσσο, ενώ το αποτέλεσμα είναι άρτιο.

$AB^c = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

(δ) ABC: Συμβαίνει όταν το άθροισμα των ζαριών είναι άρτιο, έχουμε φέρει τουλάχιστον ένα άσσο και το άθροισμα των δύο ζαριών είναι 4.

$ABC = \{(1,3), (3,1)\}$

Άσκηση 3

Μία δισκογραφική εταιρεία ελέγχει τα CD που παράγει. Ο έλεγχος σταματά όταν βρεθούν 2 ελαττωματικά CD, ή όταν έχουν ελεγχθεί 4 CD.

(α) Περιγράψτε το δειγματοχώρο αυτού του πειράματος τύχης με χρήση δενδρικού διαγράμματος.

(β) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα:

(i) E : να βρεθεί το πολύ ένα ελαττωματικό CD

(ii) F : να βρεθούν ακριβώς 2 ελαττωματικά CD

(iii) G : να ελεγχθούν συνολικά 4 CD

(γ) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα : $F \cap G$ και $G - E$

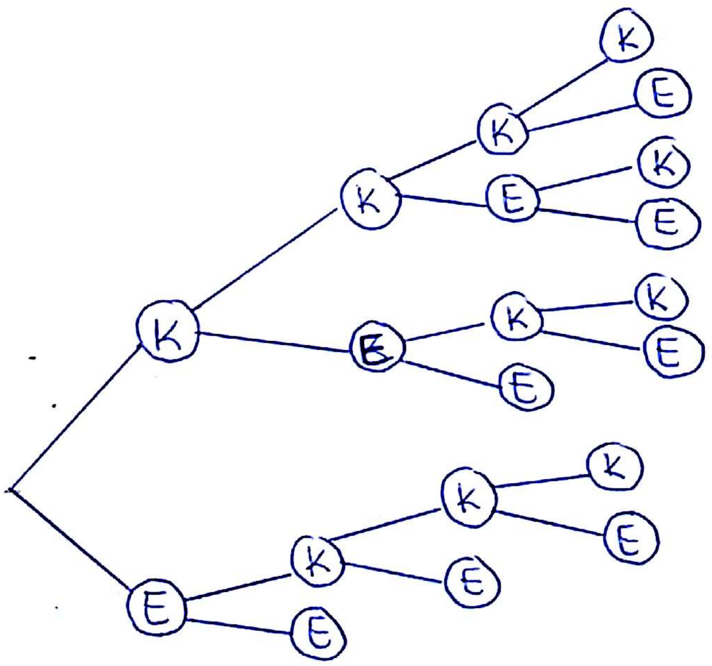
Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

E: ελαττωματικό CD

K: καλό CD

(α) Το δενδρικό διάγραμμα του πειράματος τύχης είναι:



Ο δειγματικός χώρος του πειράματος γίνεται:

Ω = { KKKK, KKKE, KKEK, KKEE, KEKK, KEKE, KEE, EKKK, EKKE, EKE, EE } (β-i) Το πολύ ένα ελαττωματικό CD:

$E = \{KKKK, KKKE, KKEK, KEKK, EKKK\}$

(β-ii) Ακριβώς 2 ελαττωματικά CD:

$F = \{KKEE, KEKE, KEE, EKKE, EKE, EE\}$

(β-iii) Να ελεγχθούν συνολικά 4 CD:

$G = \{KKKK, KKKE, KKEK, KKEE, KEKK, KEKE, EKKK, EKKE\}$

(γ) • Να βρεθούν ακριβώς 2 ελαττωματικά CD και να ελεγχθούν συνολικά 4 CD:

$F \cap G = \{KKEE, KEKE, EKKE\}$

• Να ελεγχθούν συνολικά 4 CD, αλλά να βρεθούν περισσότερα από ένα ελαττωματικό

$G - E = F \cap G$

Ασκηση 4

Σε μια τάξη με 400 φοιτητές διδάσκονται ως μαθήματα επιλογής η Φυσική και η Χημεία. Κάθε φοιτητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον ένα εκ των δύο μαθημάτων. Από το παραπάνω σύνολο φοιτητών οι 340 παρακολουθούν τη Φυσική, ενώ οι 240 τη Χημεία. Επιλέγουμε τυχαία ένα φοιτητή. Έστω A το ενδεχόμενο να παρακολουθεί τη Φυσική και G το ενδεχόμενο να παρακολουθεί τη Χημεία.

(α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και G είναι ασυμβίβαστα (ξένα).

(β) Να αποδείξετε ότι $P(G-A) \leq \frac{3}{5}$

(γ) Να βρείτε την πιθανότητα ο φοιτητής να παρακολουθεί μόνο το μάθημα της Φυσικής.

(δ) Να βρείτε την πιθανότητα ο φοιτητής να παρακολουθεί μόνο ένα εκ των δύο μαθημάτων.

Λύση

(α) Εξετάζουμε τα ενδεχόμενα A και G. Αθροίζοντας τους φοιτητές που παρακολουθούν και το μάθημα της Φυσικής και της Χημείας έχουμε: $340 + 240 = 580 > 400$. Το ενδεχόμενο της τομής των A και G είναι: $A \cap G \neq \emptyset$. Επομένως υπάρχουν φοιτητές που παρακολουθούν και τα δύο μαθήματα. Οπότε τα ενδεχόμενα A και G δεν είναι ασυμβίβαστα.

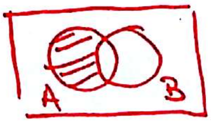
(β) Ισχύει ότι $G - A \subseteq G$, οπότε:

$P(G-A) \leq P(G)$, όμως $P(G) = \frac{240}{400} = \frac{3}{5}$

Άρα: $P(G-A) \leq \frac{3}{5}$

(γ) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A - G$.

$\boxed{\text{Θεωρία : } P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)}$



Άρα είναι: $P(A-G) = P(A) - P(A\cap G)$.

Αρκεί να βρεθεί η $P(A\cap G)$.

Γνωρίζουμε ότι:

$$P(A \cup G) = 1 \iff$$

$$P(A) + P(G) - P(A \cap G) = 1 \iff$$

$$P(A \cap G) = P(A) + P(G) - 1 \iff$$

$$P(A \cap G) = \frac{340}{400} + \frac{240}{400} - 1 \iff$$

$$P(A \cap G) = \frac{9}{20}$$

Άρα: $P(A - G) = P(A) - P(A \cap G) = \frac{340}{400} - \frac{9}{20} = \frac{2}{5}$

(δ) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A - G) \cup (G - A)$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P[(A-G) \cup (G-A)] &= P(A-G) + P(G-A) \\ &= P(A) - P(A \cap G) + P(G) - P(A \cap G) \\ &= P(A) + P(G) - 2P(A \cap G) \\ &= \frac{340}{400} + \frac{240}{400} - 2 \cdot \frac{9}{20} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Θεωρούμε ένα εξάεδρο ζάρι για το οποίο ισχύουν τα εξής:
Οι έδρες του με περιττό αριθμό έχουν διπλάσια πιθανότητα εμφάνισης από τις έδρες με άρτιο αριθμό. Όλες οι έδρες με περιττό αριθμό είναι ισοπίθανες μεταξύ τους, το ίδιο ισχύει και για τις έδρες με άρτιο αριθμό.
Να οριστεί το πιθανοτικό μοντέλο για το πείραμα της απλής ρίψης αυτού του ζαριού και βρείτε την πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι μεγαλύτερο του 4.

Λύση

Προσδιορίζουμε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων ως εξής:

$$a = P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\})$$

$$b = P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\})$$

Οι έδρες με περιττό αριθμό έχουν διπλάσια πιθανότητα εμφάνισης από τις έδρες με άρτιο αριθμό. Επομένως:

$$a = 2 \cdot b$$

Σύμφωνα με τα αξιώματα της προσθετικότητας (additivity) και της κανονικοποίησης (normalization), θα έχουμε ότι:

$$3a + 3b = 1 \iff$$

$$3 \cdot 2b + 3b = 1 \iff$$

$$6b + 3b = 1 \iff$$

$$9b = 1 \iff$$

$\boxed{b = \frac{1}{9}}$. Επομένως $\boxed{a = \frac{2}{9}}$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(\{5,6\}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Άσκηση 6

Τέσσερις ομάδες μετέχουν σε ένα τουρνουά: Ο Ηρακλής, ο Άρης, ο Απόλλων και ο Ατρόμητος. Ο Ηρακλής έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά από ότι ο Απόλλων και ο Άρης έχει 4 φορές μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά απ' ότι ο Ατρόμητος. Αν ο Ηρακλής έχει 5 φορές μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά απ' ότι ο Ατρόμητος ποιά είναι η πιθανότητα του γεγονότος ότι ο Ηρακλής ή ο Απόλλων κερδίζουν το τουρνουά;

Λύση

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα:

$H\rho$ = {κερδίζει ο Ηρακλής}

$A\rho$ = { » Άρης }

$A\pi$ = { » Απόλλων}

$A\tau$ = { » Ατρόμητος}

Μας δίδεται ότι:

$P(H\rho) = 2P(A\pi) \quad (1)$

$P(A\rho) = 4P(A\tau) \quad (2)$

$P(H\rho) = 5P(A\tau) \quad (3)$

Επίσης γνωρίζουμε ότι

$P(H\rho) + P(A\rho) + P(A\pi) + P(A\tau) = 1 \quad (4)$

- Αντικαθιστώντας τις (1)(2)(3) στην (4) έχουμε:

$$P(H\rho) + 4P(A\tau) + 0.5\,P(H\rho) + P(A\tau) = 1 \iff$$
$$5P(A\tau) + 4P(A\tau) + 2.5\,P(A\tau) + P(A\tau) = 1 \iff$$
$$12{,}5\,P(A\tau) = 1 \iff P(A\tau) = \frac{1}{12.5} = \frac{2}{25} = 0.08$$

- Στη συνέχεια αντικαθιστώντας στις (1)(2)(3) έχουμε:

$P(H\rho) = 0.4$

$P(A\rho) = 0{,}32$

$P(A\pi) = 0.2$

- Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα του γεγονότος ότι ο Ηρακλής ή ο Απόλλων κερδίζουν το τουρνουά είναι:

$$P(H\rho \cup A\pi) = P(H\rho) + P(A\pi) = 0.4 + 0.2 = 0.6$$

(Ηρ και Απ ασυμβίβαστα/ξένα γεγονότα)

Άσκηση 7

Έστω: $P(A) = 0.7$

$P(B^c) = 0.4$

$P(A \cup B) = 0.7$

Να βρείτε τις παρακάτω πιθανότητες:

(α) $P(A^c | B^c)$

(β) $P(B^c | A)$

Λύση

(α) Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας για να υπολογίσουμε:

$$P(A^c | B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P((A \cup B)^c)}{P(B^c)} = 1 - \frac{P(A \cup B)}{P(B^c)} =$$

$$= \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4}$$

(β) Ομοίως:

$$P(B^c | A) = 1 - P(B|A) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(A)}$$

$$= 1 - \frac{0.7 + 0.6 - 0.7}{0.7} = \frac{0.7 - 0.6}{0.7} = \frac{0.1}{0.7} = \frac{1}{7}$$

Άσκηση 8

Υπολογίστε την πιθανότητα $P(A\cap(B\cup C))$ σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις

(α) Τα A, B, C είναι ξένα μεταξύ τους

(β) $P(C)=0.35$, $P(A\cap B)=0.2$, $P(A\cap C)=0.3$, $P(B)=0.25$, $P(B\cup C)=0.6$

Λύση

(α) Αφού A, B, C ξένα ισχύει $A\cap B=\emptyset$, $B\cap C=\emptyset$, $A\cap C=\emptyset$

Άρα:

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=\emptyset\cup\emptyset$. Συνεπώς $A\cap(B\cup C)=0$.

(β) Ισχύει ότι: $P(A\cap(B\cup C))=P((A\cap B)\cup(A\cap C))=$

$$=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$$

Αρκεί να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(A\cap B\cap C)$.

Ξέρουμε ότι: $P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)$. Όμως ισχύει $P(B\cup C)=0.6=P(B)+P(C)$, άρα θα πρέπει $P(B\cap C)=0$ και συνεπώς $P(A\cap B\cap C)=0$.

Επομένως έχουμε:

$$P(A\cap(B\cup C))=P(A\cap B)+P(A\cap C)=0.2+0.3=0.5$$