1ο Φροντιστήριο ΗΥ217

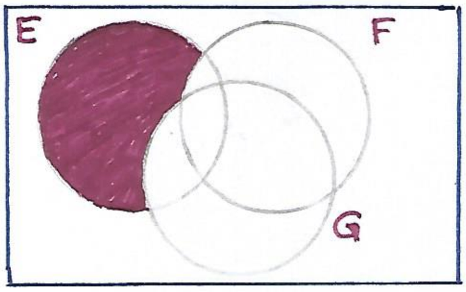
Επιμέλεια: Σ. Σαββάκη

27 Σεπτεμβρίου 2016

Άσκηση 1

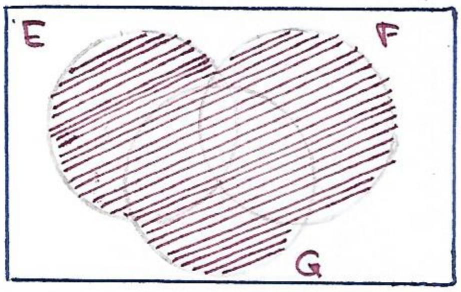
Έστω E, F και G 3 γεγονότα. Βρείτε εκφράσεις για τα γεγονότα έτσι ώστε από τα E, F και G

(α) Μόνο το E να συμβαίνει



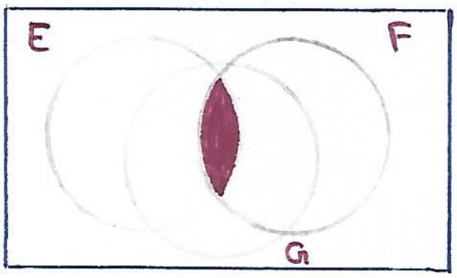
$\rightsquigarrow EF^cG^c$

(β) Τουλάχιστον ένα από τα 3 να συμβαίνουν



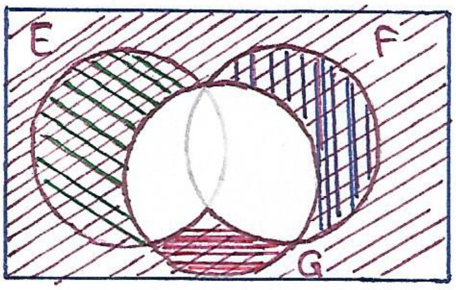
$\rightsquigarrow E \cup F \cup G$

(γ) Και τα 3 να συμβαίνουν



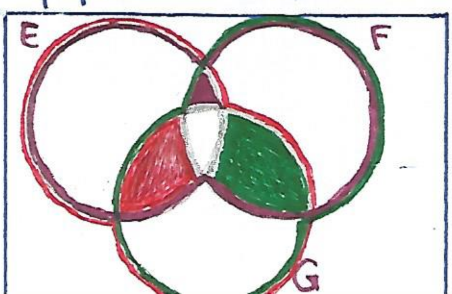
$\rightsquigarrow EFG$

(δ) Το πολύ ένα από τα 3 να συμβαίνει, δηλ. δε συμβαίνει κανένα ή συμβαίνει ακριβώς ένα



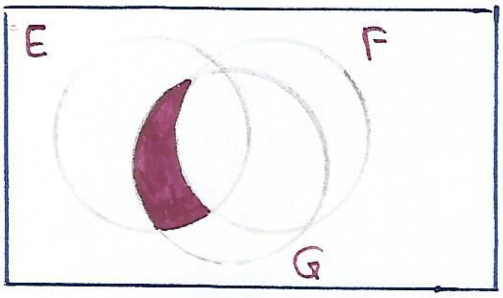
$\rightsquigarrow E^cF^cG^c \cup EF^cG^c \cup E^cFG^c \cup E^cF^cG$

(ε) Ακριβώς 2 από τα 3 να συμβαίνουν



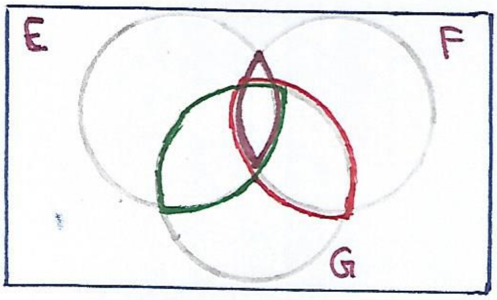
$\rightsquigarrow EFG^c \cup EF^cG \cup E^cFG$

(στ) Να συμβαίνουν τα E και G αλλά όχι το F



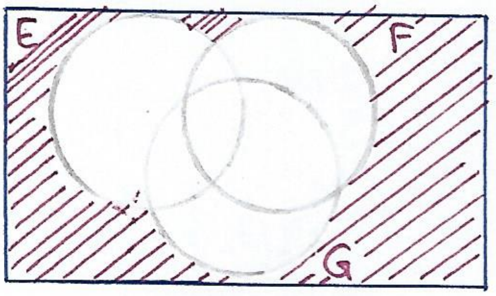
$\rightsquigarrow EF^cG$

(ζ) Τουλάχιστον 2 απο τα γεγονοτα να συμβαίνουν



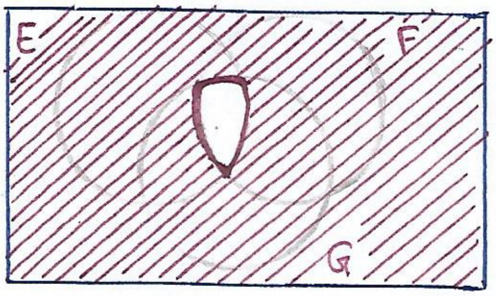
$\rightsquigarrow EF \cup EG \cup FG$

(η) Κανένα απο τα γεγονοτα να μη συμβαίνει



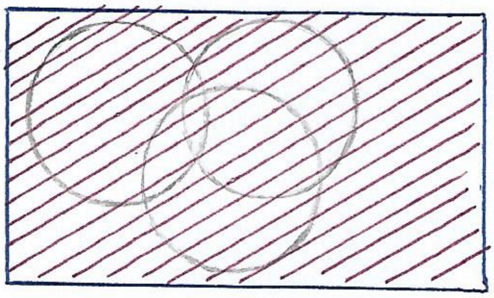
$\rightsquigarrow E^cF^cG^c$

(θ) Το πολύ 2 από αυτά να συμβαίνουν ⇝ (δηλ. να μη συμβαίνουν και τα 3 μαζί)



$\rightsquigarrow (EFG)^c$

(ι) Το πολύ 3 από αυτά να συμβαίνουν



$\rightsquigarrow \Omega$

Άσκηση 2

60% των μαθητών ενός σχολείου δεν φορούν ούτε δαχτυλίδι ούτε κολιέ. 20% φορούν δαχτυλίδι και 30% φορούν κολιέ. Αν διαλέξουμε στην τύχη έναν μαθητή ποια η πιθανότητα ο μαθητής να φορά

(α) ένα δαχτυλίδι ή ένα κολιέ;

Ορίζουμε τα γεγονότα:

$\Delta = \{$ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής φορά δαχτυλίδι$\}$

$K = \{$ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής φορά κολιέ$\}$

Μας δίδονται από τα δεδομένα της άσκησης:

$P(\overline{\Delta \cup K}) = 0{,}6 = P(\bar{\Delta} \cap \bar{K})$ (De Morgan's Law)

$P(\Delta) = 0{,}2$

$P(K) = 0{,}3$

Ζητείται: $P(\Delta \cup K) = 1 - P(\overline{\Delta \cup K}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής να φορά ή δαχτυλίδι ή κολιέ.

(β) ένα δαχτυλίδι και ένα κολιέ;

Ζητείται: $P(\Delta \cap K)$

Γνωρίζουμε ότι $P(\Delta \cup K) = P(\Delta) + P(K) - P(\Delta \cap K)$

$\Rightarrow P(\Delta \cap K) = P(\Delta) + P(k) - P(\Delta \cup k)$

$\Rightarrow P(\Delta \cap K) = 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}4$

$= 0{,}1$

Άσκηση 3

Τρεις παίχτες A, B και C ρίχνουν με αυτή τη σειρά ένα κέρμα. Ο πρώτος που θα φέρει κορώνα κερδίζει (οπότε και το παιχνίδι τελειώνει). Δώστε μια περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω για αυτό το πείραμα τύχης. Με βάση την περιγραφή σας ορίστε τα ακόλουθα γεγονότα στον Ω:

(α) $A = \{$Κερδίζει ο A$\}$

Ο δειγματοχώρος του πειράματος μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$\Omega = \{000\ldots000\ldots, 1, 01, 001, 0001, \ldots\}$

(το 0 αναπαριστά τα γράμματα και το 1 την κορώνα στην εκάστοτε ρίψη)

Με βάση την παραπάνω περιγραφή το γεγονός A ορίζεται ως:

$A = \{1, 0001, 0000001, \ldots\}$

(β) $B = \{$κερδίζει ο $B\}$

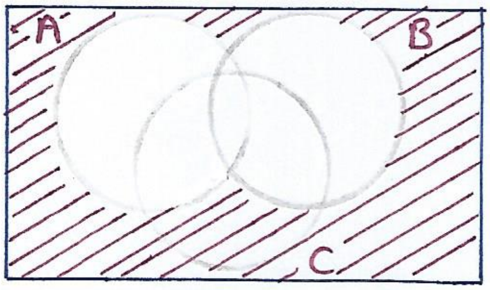
Το γεγονός B ορίζεται ως:

$B = \{01, 00001, 0000001, \dots\}$

(γ) $(A \cup B)^c$

Μας ζητείται λοιπον να ορίσουμε το γεγονός να μην κερδίσει κανένας ή να κερδίσει ο παίχτης C

Σχηματικά:



Άρα το συγκεκριμενο γεγονός ορίζεται ως:

$(A \cup B)^c = \{000\dots000\dots, 001, 000001, \dots\}$

Άσκηση 4

Ένα κουτί περιέχει 15 κόκκινες και 5 άσπρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία 2 μπάλες χωρίς επανάθεση.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα και οι 2 μπάλες να είναι άσπρες;

Το κουτί περιέχει συνολικά 20 μπάλες

Έστω $A_1 = \{$Η πρωτη μπάλα που επιλεγουμε είναι άσπρη$\}$

$A_2 = \{$Η δεύτερη μπαλα που επιλέγουμε είναι άσπρη$\}$

Τότε θα έχουμε:

$$P(A_1) = \frac{5}{20}$$

Δεδομενου ότι η πρωτη μπαλα ηταν άσπρη τώρα θα υπάρχουν πλέον στο κουτί 19 μπάλες, εκ των οποίων οι 4 θα είναι άσπρες. Άρα η πιθανοτητα ότι και η 2η μπαλα που επιλέγεται θα είναι ασπρη θα είναι:

$$P(A_2 | A_1) = \frac{4}{19}$$

Χρησιμοποιώντας τον πολλκό νόμο, η πιθανότητα ότι και οι δύο μπάλες που επιλέγονται θα είναι άσπρες θα είναι:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

(β) Ποια είναι η πιθανοτητα ότι η πρωτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη άσπρη;

Έστω $K_1 = \{$Η πρωτη μπαλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη$\}$

Τοτε θα έχουμε: $P(K_1) = \frac{15}{20}$

Δεδομένου ότι η πρωτη μπαλα ειναι κόκκινη, τωρα θα υπαρχουν πλέον 19 μπάλες στο κουτί εκ των οποίων 5 θα είναι άσπρες. Η πιθανοτητα ότι η δευτερη μπαλα που επιλέγεται τυχαία θα είναι άσπρη θα είναι:

$$P(A_2 | K_1) = \frac{5}{19}$$

Χρησιμοποιωντας τον πολ/κο νόμο, η πιθανοτητα οτι η πρωτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη άσπρη θα είναι ίση με:

$$P(K_1 \cap A_2) = P(K_1) \cdot P(A_2 / K_1)$$
$$= \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19}$$
$$= \frac{15}{76}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 5}}$

Τα ακόλουθα δεδομένα συλλέχθηκαν σε μια έρευνα ενός συνόλου 1000 συνδρομητών κάποιου περιοδικού αναφορικά με την εργασία, την οικογενειακή κατάσταση και τη μόρφωση. Υπήρχαν 312 επαγγελματίες, 470 παντρεμένοι, 525 απόφοιτοι παν/μίου, 42 επαγγελματίες απόφοιτοι παν/μίου, 147 παντρεμένοι απόφοιτοι παν/μίου, 86 παντρεμένοι επαγγελματίες και 25 παντρεμένοι επαγγελματίες απόφοιτοι παν/μίου. Αποδείξτε ότι τα νούμερα που αναφέρθηκαν στη μελέτη πρέπει να είναι ανακριβή.

Βοήθεια: Έστω M, W, G τα σύνολα των επαγγελματιών, παντρεμένων και αποφοιτων παν/μίου αντίστοιχα. Υποθέστε οτι ένας απο τους 1000 αναγνώστες επιλέγεται τυχαία και δείξτε οτι αν τα νούμερα είναι ακριβή τοτε $P(M \cup W \cup G) > 1$

Έστω M = {ενας τυχαία επιλεγμένος αναγνώστης είναι επαγγελματίας}
W = {ενας τυχαία επιλεγμένος αναγνώστης είναι παντρεμένος}
G = {ενας τυχαία επιλεγμένος αναγνώστης είναι απόφοιτος παν/μίου}

Απο τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$P(M) = 312/1000$

$P(W) = 470/1000$

$P(G) = 525/1000$

$P(M \cap G) = 42/1000$

$P(W \cap G) = 147/1000$

$P(M \cap W) = 86/1000$

$P(M \cap W \cap G) = 25/1000$

Ν.Δ.Ο : $P(M \cup W \cup G) > 1$

Θα το δείξουμε με πράξεις συνόλων και ιδιότητες:

Reminder:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\therefore P(M \cup W \cup G) = P(\underbrace{(M \cup W)}_{A} \cup \underbrace{G}_{B})$$

$$= P(M \cup W) + P(G) - P((M \cup W) \cap G)$$

$$= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - P(\underbrace{(M \cap G)}_{A} \cup \underbrace{(W \cap G)}_{B})$$

$$= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - (P(M \cap G) + P(W \cap G) - P(M \cap G \cap W))$$

$$= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - P(M \cap G) - P(W \cap G) + P(M \cap G \cap W)$$

$$= \frac{312 + 470 - 86 + 525 - 42 - 147 + 25}{1000}$$

$$= \frac{1057}{1000} = 1{,}057 > 1 \quad \text{O.E.Δ.}$$

Άσκηση 6

Ο Γιάννης έχει ένα ζευγάρι από "πειραγμένα" τετράεδρα ζάρια. Σε κάθε ρίψη, η πιθανότητα να φέρει ένα οποιοδήποτε ζεύγος είναι ανάλογη του γινομένου των δύο αριθμών που έφεραν τα ζάρια.

(α) Περιγράψτε το δειγματοχώρο του πειράματος.

Το πρόβλημα ορίζει ότι η πιθανότητα για κάποιο ζευγάρι που ρίχνουμε θα είναι $P(\kappa, \lambda) = c \cdot \kappa \cdot \lambda$ όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά κανονικοποίησης επειδή $\sum_{\kappa, \lambda} P(\kappa, \lambda) = 1$. Οι τιμές των $\kappa \cdot \lambda$ για όλα τα στοιχεία του δειγματοχώρου δίδονται παρακάτω:

1ο ζάρι \ 2ο ζάρι	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

π.χ. $P(1,3) = c \cdot 1 \cdot 3 = 3c$

$P(2,4) = c \cdot 2 \cdot 4 = 8c$

Προφανώς:

$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots (4,3), (4,4)\}$

Βρίσκουμε τώρα τη σταθερά κανονικοποίησης:

$$\sum_{\kappa=1}^{4} \sum_{\lambda=1}^{4} (P(\kappa, \lambda) = 1 \Leftrightarrow 1c + 2c + 3c + 4c + 2c + 4c + 6c + 8c + 3c + 6c + 9c + 12c + 4c + 8c + 12c + 16c = 1$$

$$\Leftrightarrow 100c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Άρα $P(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa \cdot \lambda}{100}$

(β) Ποια η πιθανότητα το γινόμενο να είναι ζυγός αριθμός;

$$P(\kappa\cdot\lambda = \text{ζυγός}) = P(1,2) + P(1,4) + P(2,1) + P(2,2) + P(2,3) + P(2,4) + P(3,2) + P(3,4) + P(4,1) + P(4,2) + P(4,3) + P(4,4)$$

$$= \frac{1}{100}(2+4+2+4+6+8+6+12+4+8+12+16)$$

$$= \frac{84}{100}$$

(γ) Ποια η πιθανότητα να φέρει το ένα ζάρι 2 και το άλλο 3;

$$P((\kappa=2, \lambda=3) \underset{\text{ξένα}}{\cup} (\kappa=3, \lambda=2)) = P(2,3) + P(3,2)$$

$$= \frac{1}{100}(6+6)$$

$$= \frac{12}{100}$$

Άσκηση 7

Ο εκφωνητής του καιρού δίνει τις ακόλουθες πιθανότητες για τον καιρό τις επόμενες δύο μέρες:

- Βροχή σήμερα: 0,3
- Βροχή αύριο: 0,5
- Βροχή σήμερα και αύριο: 0,2
- Βροχή σήμερα ή αύριο: 0,7

Είναι το δελτίο αυτό συμβατό με τα αξιώματα των Πιθανοτήτων;

Έστω A το γεγονός ότι θα βρέξει σήμερα και B το γεγονός ότι θα βρέξει αύριο. Το γεγονός ότι θα βρέξει και σήμερα και αύριο μπορεί να εκφραστεί ως η τομή των γεγονότων A και B, δηλαδή $A \cap B$. Επιπλέον, το γεγονός ότι θα βρέξει είτε σήμερα είτε αύριο είναι η ένωση των γεγονότων A και B, δηλαδή $A \cup B$. Μια από τις ιδιότητες των πιθανοτήτων είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$$

Παρατηρούμε ότι: $P(A\cup B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}6$, που έρχεται σε αντίθεση με την πιθανότητα 0,7 που έχει δοθεί από τον εκφωνητή για το ίδιο γεγονός $A\cup B$.