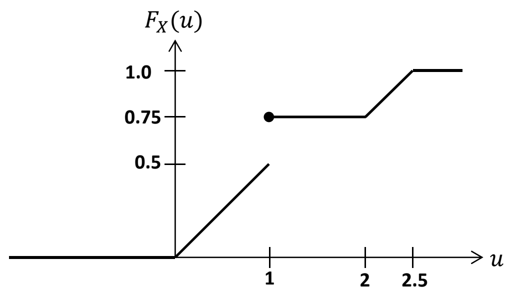
Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
26 Ιανουαρίου 2017 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής ($\alpha.\sigma.\kappa.$) $F_X(x)$ που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $\alpha.\sigma.\kappa.$ της τ.μ. X του θέματος 1.

(α) Δώστε την αναλυτική έκφραση για την $\alpha.\sigma.\kappa.$, $F_X(x)$, της τ.μ. X.
(β) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(0.5 < X < 1)$ και $P(0.5 < X \leq 1)$.
(γ) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(1 < X < 2)$ και $P(1 \leq X < 2)$.
(δ) Υπολογίστε την αναλυτική έκφραση και δώστε την γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ($\sigma.\pi.\pi.$) της τ.μ. X.
(ε) Υπολογίστε την μέση τιμή, $E[X]$, και την διασπορά, $var(X)$, της τ.μ. X.

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Ένας ενισχυτής έχει κέρδος $A = gR$ όπου g, η διαγωγιμότητα (transconductance), είναι μία θετική σταθερά, και R, η αντίσταση φορτίου (load resistance) είναι συνεχής τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα τιμών [9 11].

(α) Υπολογίστε την μέση τιμή, $\mu_A = E[A]$, και την διασπορά, $\sigma_A^2 = var(A)$, του κέρδους του ενισχυτή συναρτήσει της σταθεράς g.
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα το κέρδος, A, του ενισχυτή να απέχει από τη μέση τιμή του, μ_A, περισσότερες από 2 φορές την τυπική του απόκλιση, σ_A, δηλαδή, $P(|A - \mu_A| > 2\sigma_A)$.
(γ) Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της σταθεράς g ώστε τουλάχιστον το 80% των ενισχυτών να έχει τιμή κέρδους μεγαλύτερη από 10.

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) X και Y έχουν την ακόλουθη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ($\sigma.\pi.\pi.$):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{για } 1 \leq x \leq 2,\ 2 \leq y \leq 3, \\ c & \text{για } 2 \leq x \leq 3,\ 2 \leq y \leq 5 - x, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του πεδίου τιμών και της από κοινού $\sigma.\pi.\pi.$ των τ.μ. X και Y. Υπολογίστε την σταθερά c.
(β) Βρείτε τις περιθωριακές $\sigma.\pi.\pi.$ $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των τ.μ. X και Y, αντίστοιχα.
(γ) Βρείτε την δεσμευμένη $\sigma.\pi.\pi.$ $f_{X|Y}(x|y)$.
(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y \leq 2X)$.
(ε) Υπολογίστε την πιθανότητα $P((X - 1.5)^2 + (Y - 2.5)^2 \geq 0.5^2)$.

Θέμα 4 - 20 μονάδες. Έστω δύο Γκαουσιανές τ.μ. X και Y με τις εξής παραμέτρους: $E[X] = 1$, $E[Y] = 3$,$var(X) = 4$, $var(Y) = 1$, $\rho_{X,Y} = 0.2$.

(α) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. $Z = 2X + 3Y - 1$.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Z^2 - 2Z \leq 0)$ εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

(γ) Έστω $W = X + \alpha Y$. Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς α ώστε οι τ.μ. W και X να είναι ασυσχέτιστες.

Θέμα 5 - 20 μονάδες. Θεωρείστε ένα κύλινδρο με ύψος H και ακτίνα R, όπου H και R είναι δύο ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τ.μ. που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0\ 1]$: $H \sim U[0\ 1]$ και $R \sim U[0\ 1]$. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι προφανώς $V = \pi H R^2$.

(α) Υπολογίστε το μέσο όγκο, $E[V]$, του κυλίνδρου.

(β) Ποια η πιθανότητα ο όγκος του κυλίνδρου να είναι μεγαλύτερος από $\frac{\pi}{27}$ δεδομένου ότι το ύψος του είναι ίσο με $\frac{1}{3}$;

(γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_V(v)$, του όγκου V. Ποια η πιθανότητα $P(V \leq \pi/2)$;

(δ) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_V(v)$.