ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2014
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 11/10/2016 Ημερομηνία Παράδοσης: 20/10/2016

Θέματα: Δεσμευμένη Πιθανότητα, ΘΟΠ, Νόμος του Bayes, Ανεξαρτησία.

Άσκηση 1.
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
A = Το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι αρνητικό.
Θ = Το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι θετικό.
B = Ένα τυχαίο άτομο του πληθυσμού πάσχει από την ασθένεια.

Οι αντίστοιχες πιθανότητες των απλών ενδεχομένων είναι:

$$P(B) = \tfrac{1}{1000} = 0.001 \text{ , } P(A|B) = 0.01 \text{ , } P(\Theta|B^C) = 0.02$$

$$P(B^C) = \tfrac{999}{1000} = 0.999 \text{ , } P(\Theta|B) = 0.99 \text{ , } P(A|B^C) = 0.98$$

(α) Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας η πιθανότητα το τεστ να βγει θετικό είναι:

$$P(\Theta) = P(\Theta|B)P(B) + P(\Theta|B^C)P(B^C) = 0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999 = 0.02097$$

(β) Από το νόμο του Bayes, αν το αποτέλεσμα είναι θετικό, η πιθανότητα να πάσχει το άτομο από την ασθένεια γίνεται:

$$P(B|\Theta) = \frac{P(B)P(\Theta/B)}{P(B)P(\Theta/B) + P(B^C)P(\Theta/B^C)} = \frac{P(\Theta|B)P(B)}{P(B)} = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.0297} \approx 0.047$$

Άσκηση 2.
(α) Έστω A το ενδεχόμενο το κέρμα του Κώστα να φέρει κεφαλή και B το ενδεχόμενο να φέρει γράμματα. Έστω επίσης O_n το ενδεχόμενο η n-στή ρίψη να φέρει μπλε. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(O_n) = P(O_n|A)P(A) + P(O_n|B)P(B) = (4/6) \cdot (1/2) + (1/2) \cdot (1/2) = 7/12.$$

(β) Κάνοντας ξανά χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(O_n \cap O_{n+1}) &= \frac{1}{2}P((O_n \cap O_{n+1})|A) + \frac{1}{2}P((O_n \cap O_{n+1})|B) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{25}{72}. \end{aligned}$$

(γ) Έστω F_n το ενδεχόμενο και οι n πρώτες ρίψεις να φέρουν μπλε.

$$\begin{aligned} P\left(O_{n+1}|F_n\right) &= \frac{P\left(O_{n+1}\cap F_n\right)}{P\left(F_n\right)} = \frac{P\left(F_{n+1}\right)}{P\left(F_n\right)} \\ &= \frac{(1/2)P\left(\left.F_{n+1}\right|A\right)+(1/2)P\left(\left.F_{n+1}\right|B\right)}{(1/2)P\left(\left.F_{n}\right|A\right)+(1/2)P\left(\left.F_{n}\right|B\right)} \\ &= \frac{(4/6)^{n+1}+(1/2)^{n+1}}{(4/6)^{n}+(1/2)^{n}}. \end{aligned}$$

Για μεγάλα n, το $(4/6)^n$ γίνεται πολύ μεγαλύτερο από το $(1/2)^n$, επομένως το $P\left(O_{n+1}|F_n\right)$ προσεγγίζει το $\frac{(4/6)^{n+1}}{(4/6)^n} = 4/6$. Αυτό το αποτέλεσμα είναι λογικό: όσο περισσότερες φορές εμφανίζεται το μπλε, τόσο πιο πιθανό είναι ότι έχει επιλεγεί το ζάρι A (το οποίο με πιθανότητα $4/6$ φέρνει μπλε).

(δ) Ζητάμε την πιθανότητα $P\left(A\,|F_n\right)$ καθώς το $n\to\infty$. Με εφαρμογή του κανόνα του Bayes έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(A\,|F_n\right) &= \frac{P\left(\left.F_n\right|A\right)P(A)}{P\left(F_n\right)} = \frac{P\left(\left.F_n\right|A\right)P(A)}{P\left(\left.F_n\right|A\right)P(A)+P\left(\left.F_n\right|B\right)P(B)} \\ &= \frac{(4/6)^n(1/2)}{(4/6)^n(1/2)+(1/2)^n(1/2)} = \frac{1}{1+(3/4)^n} \end{aligned}$$

Καθώς το n τείνει στο άπειρο, ο όρος $(3/4)^n$ στον παρονομαστή τείνει στο 0 και το κλάσμα τείνει στη μονάδα: Αν συνέχεια εμφανίζεται μπλε, είναι εξαιρετικά πιθανό να έχει επιλεγεί το ζάρι A που έχει περισσότερες μπλε πλευρές από το ζάρι B.

Άσκηση 3.

Γνωρίζουμε ότι για να είναι δύο γεγονότα ανεξάρτητα πρέπει να ισχύει ότι:

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

Κάνοντας λοιπόν χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας για την τομή των A,B:

$$P(A\cap B) = \sum_{i=1}^{N} P(A\cap B|C_i)P(C_i) \qquad (\mathbf{1})$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα A,B είναι ανεξάρτητα για δεδομένο C_i η (1) γίνεται:

$$P(A\cap B) = \sum_{i=1}^{N} P(A|C_i)P(B|C_i)P(C_i) \qquad (\mathbf{2})$$

Χρησιμοποιώντας και το άλλο γεγονός που λέει ότι το B είναι ανεξάρτητο από τα C_i η (2) γίνεται:

$$P(A\cap B) = \sum_{i=1}^{N} P(A|C_i)P(B)P(C_i) = P(B)\sum_{i=1}^{N} P(A|C_i)P(C_i) \qquad (\mathbf{3})$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας στην σχέση (3), αυτή τη φορά για το ενδεχόμενο A, καταλήγουμε τελικά στο ότι:

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

που ήταν και αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

Άσκηση 4.
Το πλήθος των αποτελεσμάτων που μπορεί να φέρει ένα ζευγάρι παικτών είναι n^2, όσα τα διατεταγμένα ζεύγη $\{(i,j);\ i,j = 1,\ldots,n\}$, και είναι όλα ισοπίθανα καθώς το ζάρι είναι αμερόληπτο. Από αυτά, n το πλήθος ζεύγη έχουν το ίδιο αποτέλεσμα $i = j$. Επομένως:

$$P(A_{12}) = P(A_{13}) = P(A_{23}) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Με παρόμοιο συλλογισμό, έχουμε ότι:

$$P(A_{12} \cap A_{13}) = P(\textit{όλοι οι παίχτες φέρνουν την ίδια πλευρά}) = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

και συνεπώς έχουμε ότι

$$P(A_{12} \cap A_{13}) = P(A_{12}) \cdot P(A_{13}).$$

Επομένως τα A_{12} και A_{13} είναι ανά ζεύγη ανεξάρτητα. Ομοίως και τα (A_{12}, A_{23}) και (A_{13}, A_{23}). Ωστόσο τα A_{12}, A_{13} και A_{23} δεν είναι ανεξάρτητα. Εάν συμβούν τα A_{12} και A_{13}, δηλαδή οι παίκτες 1 και 2 φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα **και** οι παίκτες 1 και 3 φέρουν το ίδιο αποτέσμα, τότε και οι παίκτες 2 και 3 φέρνουν το ίδιο αποτέσμα, δηλαδή συμβαίνει και το A_{23}: $P(A_{23}|A_{12} \cap A_{13}) = 1 \neq P(A_{23})$.

Άσκηση 5.
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
Α = Επιλέγουμε ένα φακελάκι με σπόρους για 20 τριανταφυλλιές που κάνουν λευκά τριαντάφυλλα και 10 τριανταφυλλιές που κάνουν κόκκινα τριαντάφυλλα.
Β = Επιλέγουμε ένα φακελάκι με σπόρους για 25 τριανταφυλλιές που κάνουν λευκά τριαντάφυλλα και 5 τριανταφυλλιές που κάνουν κόκκινα τριαντάφυλλα.

Οι πιθανότητες που παίρνουμε για αυτά τα απλά ενδεχόμενα είναι:

$P(A) = 0.75$, αφού τα $\frac{3}{4}$ από τα φακελάκια που είναι στο κουτί ανήκουν στο ενδεχόμενο Α.

$P(B) = 0.25$, αφού το $\frac{1}{4}$ από τα φακελάκια που είναι στο κουτί ανήκουν στο ενδεχόμενο Β.

(α) Έστω το ενδεχόμενο Λ = $\{$η τριανταφυλλιά έχει λευκά τριαντάφυλλα$\}$. Η πιθανότητα $P(\Lambda)$ είναι ίση με το να βρούμε σπόρο για λευκά τριαντάφυλλα δεδομένου ότι διαλέξαμε ένα τα φακελάκια του Α, ή να βρούμε σπόρο για λευκά τριαντάφυλλα δεδομένου ότι διαλέξαμε από τα φακελάκια του Β, άρα:

$$P(\Lambda) = P(\Lambda \cap B) \cup P(\Lambda \cap A) \qquad (1)$$

Οι δύο πιθανότητες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους οπότε η (1) γίνεται:

$$P(\Lambda) = P(\Lambda \cap B) + P(\Lambda \cap A) \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστικό νόμο έχω:

$$P(\Lambda) = P(\Lambda|B)P(B) + P(\Lambda|A)P(A) \qquad (3)$$

Στην περίπτωση που ισχύει τελικά το ενδεχόμενο Α, η πιθανότητα να επιλέξαμε σπόρο για λευκά τριαντάφυλλα είναι $P(\Lambda|A) = \frac{20}{30} \approx 0.83$, ενώ στην περίπτωση που ισχύει το ενδεχόμενο Β, η πιθανότητα είναι $P(\Lambda|B) = \frac{25}{30} \approx 0.66$.

Άρα η σχέση (3) γίνεται:

$$P(\Lambda) = 0.83 \cdot 0.25 + 0.66 \cdot 0.75 \approx 0.71$$

(β) Έστω το ενδεχόμενο Κ = $\{$η τριανταφυλλιά έχει κόκκινα τριαντάφυλλα$\}$. Η πιθανότητα $P(K)$ είναι ίση με το να βρούμε σπόρο για κόκκινα τριαντάφυλλα δεδομένου ότι διαλέξαμε ένα τα φακελάκια του Α, ή να βρούμε σπόρο για κόκκινα τριαντάφυλλα δεδομένου ότι διαλέξαμε από τα φακελάκια του Β. Παρόμοια με το (α) λοιπόν:

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K \cap B) \cup P(K \cap A) \\ &= P(K \cap B) + P(K \cap A) \\ &= P(K|B)P(B) + P(K|A)P(A) \\ &= 0.17 \cdot 0.25 + 0.33 \cdot 0.75 \approx 0.29 \end{aligned}$$

(γ) Ζητάμε την πιθανότητα $P(B|K)$. Από νόμο του Bayes έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(B|K) &= \frac{P(K|B)P(B)}{P(K)} \\ &= \frac{0.0425}{0.29} \approx 0.15 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

Έστω A_0 το ενδεχόμενο ότι διαβάζω το bit 0, έστω A_1 το ενδεχόμενο ότι διαβάζω το bit 1, έστω B_0 το ενδεχόμενο ότι το bit που διαβάζω είναι πράγματι 0 και έστω B_1 το ενδεχόμενο ότι το bit που διαβάζω είναι πράγματι 1. Οπότε, ισχύουν οι εξής πιθανότητες: $P(B_0|A_0) = 0.9$, $P(B_1|A_1) = 0.85$, $P(B_1|A_0) = 1 - P(B_0|A_0) = 1 - 0.9 = 0.1$, $P(B_0) = P(B_1) = 1/2$.
Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(B_1|A_1)$. Από τον νόμο του Bayes θα ισχύει:

$$\begin{aligned} P(B_1|A_1) &= \frac{P(B_1)P(A_1|B_1)}{P(B_1)P(A_1|B_1) + P(B_0)P(A_1|B_0)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.85}{\frac{1}{2} \cdot 0.85 + \frac{1}{2} \cdot 0.1} \\ &\cong 0.895 \end{aligned}$$

Άσκηση 7.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Κ = Το αυτοκίνητο είναι κόκκινο.
Β = Το αυτοκίνητο είναι μπλε.

Οι πιθανότητες που παίρνουμε για αυτά τα απλά ενδεχόμενα είναι:

$P(K) = 0.4$, αφού το 40% των κατοίκων έχει κόκκινα αυτοκίνητα.
$P(B) = 0.6$, αφού τα 60% των κατοίκων έχει μπλε αυτοκίνητα.

Αφού ο μάρτυρας μπορεί να διακρίνει σωστά το αυτοκίνητο το 75% των φορών μπορούμε να ορίσουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

MB = Ο μάρτυρας είδε μπλε αυτοκίνητο.
MR = Ο μάρτυρας είδε κόκκινο αυτοκίνητο.

Και οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι:

$$P(MR|K) = 0.75$$
$$P(MR|B) = 0.25$$
$$P(MB|K) = 0.25$$
$$P(MB|B) = 0.75$$

Εφόσον ο μάρτυρας ισχυρίζεται ότι είδε κόκκινο αυτοκίνητο, η πιθανότητα το αυτοκίνητο να είναι όντως κόκκινο δίνεται από τον νόμο του Bayes και είναι ίση με:

$$\begin{aligned} P(K|MR) &= \frac{P(MR|K)P(K)}{P(MR)} \\ &= \frac{P(MR|K)P(K)}{P(MR|K)P(K) + P(MR|B)P(B)} \\ &= \frac{0.75 \cdot 0.4}{(0.75 \cdot 0.4) + (0.25 \cdot 0.6)} \\ &\approx 0.7 \end{aligned}$$

Η πιθανότητα το αυτοκίνητο να είναι μπλε ενώ ο μάρτυρας είδε κόκκινο είναι ίση με:
$P(B|MR) = 1 - P(K|MR) = 1 - 0.7 = 0.3$

Άρα το αυτοκίνητο κατά πάσα πιθανότητα ήταν κόκκινο.