ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2016-2017
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/11/2016 Ημερομηνία Παράδοσης: 6/12/2016

Θέματα: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (Ι).

Άσκηση 1. Η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ($\sigma.\pi.\pi.$):

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1 - 0.1|x|) & \text{για } -10 \leq x \leq 10, \\ 0 & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

όπου a μία σταθερά.

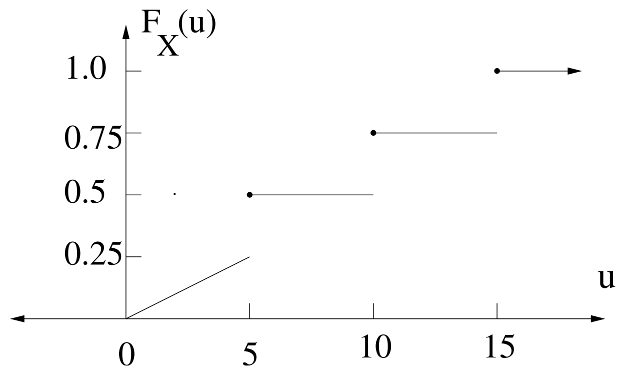
(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της $\sigma.\pi.\pi.$ και υπολογίστε το a.
(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X.
(γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής ($\alpha.\sigma.\kappa.$), $F_X(x)$, της X και δώστε τη γραφική της παράσταση.

Άσκηση 2. Η ποσότητα ψωμιού (σε εκατοντάδες κιλά) που πουλάει ένα αρτοποιείο κατά τη διάρκεια μιας ημέρας είναι συνεχής τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x < 3 \\ c(6 - x) & 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c.
(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της τ.μ. X.
(γ) Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$ και δείξτε ότι είναι μία έγκυρη $\alpha.\sigma.\kappa.$
(δ) Ποια η πιθανότητα ότι σε μία ημέρα θα πουληθούν: (ι) περισσότερα από 300 κιλά ψωμί, (ιι) μεταξύ 150 και 900 κιλών ψωμί;
(ε) Αν A και B είναι τα γεγονότα (ι) και (ιι), αντίστοιχα, είναι τα A και B ανεξάρτητα;

Άσκηση 3. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$ της τ.μ. X φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$ της τ.μ. X.

Υπολογίστε τα ακόλουθα:

(α) $P(X \leq 1)$.

(β) $P(X \leq 10)$.

(γ) $P(X > 10)$.

(δ) $P(X \geq 10)$.

(στ) $P(|X - 5| \leq 0.1)$.

(ε) Κατανομή, $f_X(x)$, της X. Τι είδους μεταβλητή είναι η X;

(ζ) Μέση τιμή, $E[X]$.

Άσκηση 4. Έχει παρατηρηθεί ότι ο χρόνος που χρειάζεται ένα ασθενοφόρο για να φθάσει από ένα κέντρο υγείας στο πλησιέστερο περιφερειακό νοσοκομείο, ακολουθεί κατά προσέγγιση κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 17$ λεπτά και τυπική απόκλιση $\sigma = 3$ λεπτά. Να βρεθεί η πιθανότητα ο χρόνος που θα χρειασθεί το ασθενοφόρο για να φθάσει στο περιφερειακό νοσοκομείο,

(α) να είναι το πολύ 15 λεπτά

(β) να είναι περισσότερο από 22 λεπτά

(γ) να είναι τουλάχιστον 13 λεπτά και το πολύ 21 λεπτά

Εκφράστε την απάντησή σας βάσει των τιμών $\Phi(0.67) = 0.7486$, $\Phi(1.67) = 0.9525$ και $\Phi(1.33) = 0.9082$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

Άσκηση 5. Δίδεται η τ.μ. $X \sim U[2,\ 10]$, δηλαδή, η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[2,\ 10]$. Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $X^2 - 12X + 35 > 0$.

Άσκηση 6. Τα αποτελέσματα σε ένα τεστ δεξιοτήτων ακολουθούν κανονική κατανομή με $\mu = 500$ και $\sigma = 100$. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος βαθμός που μπορεί να έχει ένας μαθητής, ώστε να βρίσκεται στο 20% της μικρότερης βαθμολογίας της κατανομής; (*Βοήθεια:* Διατυπώστε έκφραση για την απάντησή σας χρησιμοποιώντας την τιμή $\Phi(0.84) = 0.8$ της τυπικής Γκαουσιανής.)

Άσκηση 7. Εστω X η τ.μ. που εκφράζει το χρόνο ζωής (σε χιλιάδες ώρες) ενός λαμπτήρα. Έχει βρεθεί ότι η πιθανότητα να λειτουργήσει ο λαμπτήρας περισσότερο από χρόνο x είναι:

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}, x > 0$$

για κάποιο $\lambda > 0$. Να βρεθει η αθροιστική συνάρτηση κατανομής ($\alpha.\sigma.\kappa.$), $F_X(x)$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ($\sigma.\pi.\pi.$), $f_X(x)$. Το εργοστάσιο το οποίο κατασκευάζει τους λαμπτήρες, επιθυμεί να δώσει στους πελάτες εγγύηση για ορισμένο αριθμό ωρών. Αν ένας λαμπτήρας καεί νωρίτερα επιστρέφει στο εργοστάσιο για αντικατάσταση. Αν έχει εκτιμηθεί ότι $\lambda = 0.1$, ποιός αριθμός ωρών πρέπει να δοθεί σαν εγγύηση ώστε το πολύ 1% των λυχνιών να επιστρέφονται στο εργοστάσιο;