ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 21/10/2016 Ημερομηνία Παράδοσης: 01/11/2016

Θέματα: Στοιχεία Συνδυαστικής Ανάλυσης και Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (Ι).

Άσκηση 1. Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο k ατόμων των οποίων καταγράφουμε τα γενέθλια. Σημειώνουμε ότι ένα έτος έχει 365 ημέρες εκτός και αν είναι δίσεκτο, οπότε έχει 366 ημέρες. Επίσης έχει παρατηρηθεί ότι ο αριθμός των γεννήσεων δεν είναι σταθερός καθ' όλη τη διάρκεια του έτους. Όμως, σε πρώτη προσέγγιση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα έτος έχει 365 ημέρες οι οποίες είναι εξίσου πιθανές ως ημέρες γενεθλίων. Με την παραδοχή αυτή, να υπολογισθεί η πιθανότητα όπως δύο τουλάχιστον από τα k άτομα να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

Άσκηση 2. Το μάθημα των Πιθανοτήτων παρακολουθούν 100 φοιτητές, εκ των οποίων 40 είναι αγόρια και οι υπόλοιποι είναι κορίτσια. Για την καλύτερη δυνατή προετοιμασία τους εν όψει της εξέτασης του μαθήματος, σχεδιάζουν να διαβάσουν σε ομάδες εργασίας.

(α) Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια 5-μελής ομάδα εργασίας;

(β) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια 5-μελής ομάδα εργασίας, αν πρέπει να υπάρχουν σε αυτή 2 αγόρια και 3 κορίτσια;

(γ) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια 5-μελής ομάδα εργασίας, αν πρέπει να υπάρχουν σε αυτή 4 αγόρια και 1 κορίτσι;

(δ) Ποια η πιθανότητα να επιλέξουμε μόνο αγόρια;

Άσκηση 3. Σε μία πόλη $2n$ κατοίκων $a_1, a_2, ..., a_{2n}$, οι $a_1, a_2, ..., a_n$ είναι άνδρες (έχουν πλήθος n) και οι υπόλοιποι n είναι γυναίκες. Στην πόλη αυτή το κοινωνικό ενδιαφέρον είναι μεγάλο, με αποτέλεσμα οι κάτοικοι να διαδίδουν συνεχώς φημολογίες. Πιο συγκεκριμένα, ο a_1 επιλέγει τυχαία μία γυναίκα από τις n και της λέει μια φημολογία. Έπειτα, εκείνη επιλέγει τυχαία έναν άνδρα από τους n και κάνει το ίδιο, και η διαδικασία συνεχίζεται παρόμοια. Δηλαδή, κάθε άτομο επιλέγει στην τύχη ένα άτομο του αντίθετου φύλου και του λέει τη φημολογία. Να βρεθεί η πιθανότητα η φημολογία να ειπωθεί $2k + 1$ φορές, χωρίς να ακουστεί ξανά από κάποιο άτομο που την έχει μεταφέρει σε κάποιο προηγούμενο βήμα. Υποθέτουμε ότι $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Άσκηση 4. Να υπολογιστεί το πλήθος των αναγραμματισμών που υπάρχουν για τις εξής λέξεις:

(α) ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΣ
(β) ΠΡΩΤΑΘΛΗΤΗΣ
(γ) ΚΥΠΕΛΛΟΥΧΟΣ

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Άσκηση 5.
(α) Θεωρούμε 2 διαδοχικές ρίψεις ενός συνήθους νομίσματος, με τον εξής δειγματικό χώρο του τυχαίου πειράματος: Ω=$\{(\gamma,\gamma),(\gamma,\kappa),(\kappa,\gamma),(\kappa,\kappa)\}$, όπου με κ σημειώνεται η όψη «κορώνα» και με γ η όψη «γράμματα». Έστω X τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) η οποία εκφράζει τον αριθμό των εμφανίσεων της όψης «γράμματα». Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X, και να γίνει η γραφική της παράσταση.

(β) Ρίχνουμε 2 δίκαια τρίεδρα ζάρια. Ορίζουμε την τ.μ. X ως τη διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο ρίψεων. Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Άσκηση 6. Έστω ένας πομπός ο οποίος εκπέμπει τα σήματα 0 και 1 σε αναλογία 1 προς 4. Αν X είναι ο αριθμός των σημάτων 0 που εκπέμπονται σε 10 εκπομπές σημάτων, να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 7. Έστω ότι σε 10 ρίψεις ενός μη-αμερόληπτου νομίσματος η πιθανότητα να εμφανιστεί 5 φορές «κορώνα» είναι διπλάσια της πιθανότητας να εμφανιστεί 4 φορές «κορώνα». Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε 5 ρίψεις να εμφανιστεί τουλάχιστον 1 φορά «κορώνα».

Άσκηση 8. Ένας σκοπευτής βάλλει εναντίον στόχου με πιθανότητα επιτυχίας (για κάθε βολή) ίση με 0,6. Ο σκοπευτής ρίχνει 4 βολές. Να βρεθεί η πιθανότητα:

(α) 3 επιτυχιών
(β) Καμίας επιτυχίας
(γ) Τουλάχιστον 1 επιτυχίας
(δ) 1 επιτυχίας