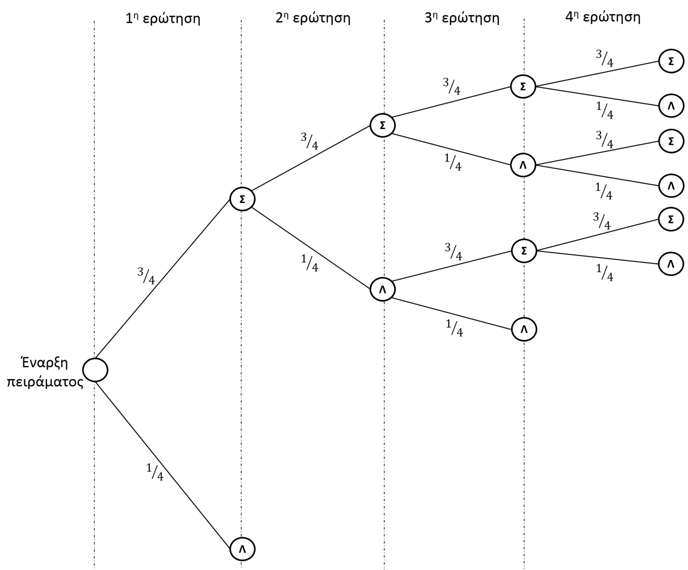
Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α') Αν συμβολίσουμε με Λ τη λάθος απάντηση και με Σ τη σωστή, το δενδρικό διάγραμμα αυτού του πειράματος τύχης απεικονίζεται στο Σχήμα 1:



Σχήμα 1: Δενδρική αναπαράσταση ερωτήματος 1α.

Συνεπώς, ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι

$$\Omega = \big\{(\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma), (\Sigma\Sigma\Sigma\Lambda), (\Sigma\Sigma\Lambda\Sigma), (\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda), (\Sigma\Lambda\Sigma\Sigma), (\Sigma\Lambda\Sigma\Lambda), (\Sigma\Lambda\Lambda), (\Lambda)\big\}$$

(β') Η πιθανότητα να απαντηθούν σωστά και οι τέσσερις ερωτήσεις, κάνοντας χρήση του πολλαπλασιαστικού νόμου στο παραπάνω διάγραμμα θα είναι

$$P(\{\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 0.3164$$

(γ') • Εφόσον ο φοιτητής απορρίπτεται με λάθος απάντηση στην πρώτη ερώτηση ή σε δύο διαδοχικές, το γεγονός A ότι ο φοιτητής απορρίφθηκε, θα είναι

$$A = \big\{(\Lambda), (\Sigma\Lambda\Lambda), (\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda)\big\}$$

με πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= 0.3320 \end{aligned}$$

- Το γεγονός B, λάθος απάντησης στην τρίτη ερώτηση, είναι

  $$B = \{(\Sigma\Lambda\Lambda), (\Sigma\Sigma\Lambda\Sigma), (\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda)\}$$

  με πιθανότητα

  $$P(B) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0.1875$$

- Το γεγονός Γ, λάθος απάντησης στην τέταρτη ερώτηση είναι

  $$\Gamma = \{(\Sigma\Lambda\Sigma\Lambda), (\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda), (\Sigma\Sigma\Sigma\Lambda)\}$$

  με πιθανότητα

  $$P(\Gamma) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{4} = 0.1758$$

- Το γεγονός Δ, ο φοιτητής πέρασε, είναι

  $$\Delta = \{(\Sigma\Lambda\Sigma\Sigma), (\Sigma\Lambda\Sigma\Lambda), (\Sigma\Sigma\Lambda\Sigma), (\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma), (\Sigma\Sigma\Sigma\Lambda)\}$$

  με πιθανότητα

  $$P(\Delta) = 1 - P(A) = 1 - 0.3320 = 0.6680$$

- Το γεγονός E, ο φοιτητής απάντησε λάθος στην τρίτη ερώτηση και πέρασε, θα προκύψει από την τομή των γεγονότων Β (ο φοιτητής απάντησε λάθος στην τρίτη ερώτηση) και Δ (ο φοιτητής πέρασε)

  $$E = B \cap \Delta = \{\Sigma\Sigma\Lambda\Sigma\}$$

  με πιθανότητα

  $$P(E) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{4} = 0.1055$$

Άσκηση 2.

Τα απλά γεγονότα είναι μεταξύ τους ξένα, συνεπώς η πιθανότητα της ένωσής τους ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων τους

$$P(\{A \cup C\}) = P(A) + P(C) = \frac{9}{16} \tag{1}$$

$$P(\{A \cup B\}) = P(A) + P(B) = \frac{3}{4}. \tag{2}$$

Τέλος, ο δειγματοχώρος Ω έχει $P(\Omega) = 1$, συνεπώς έχουμε

$$P(\Omega) = P(A) + P(B) + P(C) = 1. \tag{3}$$

Οι (1), (2), (3), αποτελούν ένα απλό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, το οποίο εύκολα υπολογίζουμε ότι έχει μοναδική λύση τις τιμές

$$P(A) = \frac{5}{16}, \quad P(B) = \frac{7}{16}, \quad P(C) = \frac{1}{4}.$$

Άσκηση 3.
Έστω τα γεγονότα

$$I = \{\text{Ο επιλεγμένος μαθητής είναι ιδιοφυΐα}\}$$

και

$$\Sigma = \{\text{Ο επιλεγμένος μαθητής είναι λάτρης της σοκολάτας}\}.$$

Μας δίδεται ότι

$$P(I) = 0.6 \quad P(\Sigma) = 0.7 \quad \text{και} \quad P(I \cap \Sigma) = 0.4.$$

Μας ενδιαφέρει το γεγονός $P(I^c \cap \Sigma^c)$, που υπολογίζεται ως

$$P(I^c \cap \Sigma^c) = P(I \cup \Sigma)^c = 1 - P(I \cup \Sigma) = 1 - (P(I) + P(\Sigma) - P(I \cap \Sigma)) = 1 - (0.6 + 0.7 - 0.4) = 0.1.$$

Άσκηση 4.
Πρώτα, προσδιορίζουμε τις πιθανότητες των έξι απλών ενδεχομένων. Έστω

$$a = P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\})$$

$$b = P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}).$$

Μας δίδεται ότι

$$b = 3a.$$

Σύμφωνα με τα Αξιώματα της Προσθετικότητας (Additivity) και της Κανονικοποίησης (Normalization), θα έχουμε ότι

$$1 = 3a + 3b = 3a + 9a = 12a.$$

Επομένως, θα είναι

$$a = \frac{1}{12}, \quad b = \frac{3}{12}$$

και η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με

$$P(\{1,2,3\}) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

Άσκηση 5.

(α΄) Κάθε απλό γεγονός έρχεται με πιθανότητα $1/36$. Υπάρχουν 6 ενδεχόμενα να έρθουν διπλές, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $6/36 = 1/6$.

(β΄) Το υπό συνθήκη σύνθετο γεγονός, η ζαριά να φέρει άθροισμα 4 ή μικρότερο, αποτελείται από τα 6 απλά γεγονότα

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$$

δύο εκ των οποίων είναι διπλές, συνεπώς η ζητούμενη δεσμευμένη πιθανότητα είναι $2/6 = 1/3$.

(γ΄) Υπάρχουν 11 απλά γεγονότα, στα οποία τουλάχιστον ένα ζάρι φέρνει 6, τα $(6,6), (6,i)$ και $(i,6)$, για $i = 1,2,\ldots,5$. Συνεπώς, η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα ζάρι φέρνει 6 είναι $11/36$.

(δ΄) Υπάρχουν 30 απλά γεγονότα στα οποία τα ζάρια προσγειώνονται σε διαφορετικούς αριθμούς. Από αυτά, υπάρχουν 10 ενδεχόμενα στα οποία τουλάχιστον το ένα ζάρι φέρνει 6. Συνεπώς, η ζητούμενη υπό συνθήκη πιθανότητα θα είναι $10/30 = 1/3$.

Άσκηση 6.
Ορίζουμε τα γεγονότα

$$A = \{\text{Η πρώτη ρίψη είναι κεφαλή.}\}$$

$$B = \{\text{Η δεύτερη ρίψη είναι κεφαλή.}\}$$

Μας ζητείται να συγκρίνουμε τις υπό συνθήκη πιθανότητες $P(A \cap B|A)$ και $P(A \cap B|A \cup B)$.

Έχουμε

$$P(A \cap B|A) = \frac{P((A \cap B) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

και

$$P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}.$$

Αφού, $P(A \cup B) \geq P(A)$, η πρώτη υπό συνθήκη πιθανότητα είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο η δεύτερη, συνεπώς η Αλίκη έχει δίκιο, ανεξαρτήτως αν το νόμισμα είναι δίκαιο ή όχι.

Στην περίπτωση που το νόμισμα είναι δίκαιο, δηλαδή όλα τα απλά ενδεχόμενα $\{KK\}, \{K\Gamma\}, \{\Gamma K\}, \{\Gamma\Gamma\}$ είναι ισοπίθανα, έχουμε

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{(1/4)}{1/2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Άσκηση 7.
Υπάρχουν τέσσερα απλά ενδεχόμενα, που ανταποκρίνονται στους τέσσερις πιθανούς συνδυασμούς επιτυχίας-αποτυχίας των δύο ομάδων:

$$EE = \{\text{Και οι δύο ομάδες σχεδιάζουν επιτυχημένο προϊόν.}\}$$

$$EA = \{\text{Η ομάδα Σ σχεδιάζει επιτυχημένο προϊόν, ενώ η Κ αποτυγχάνει.}\}$$

$$AE = \{\text{Η ομάδα Κ σχεδιάζει επιτυχημένο προϊόν, ενώ η Σ αποτυγχάνει.}\}$$

$$AA = \{\text{Και οι δύο ομάδες αποτυγχάνουν.}\}$$

Μας δίδεται ότι οι πιθανότητες των παραπάνω γεγονότων ικανοποιούν

$$P(EE) + P(EA) = \frac{2}{3}, \quad P(EE) + P(AE) = \frac{1}{2}, \quad P(EE) + P(EA) + P(AE) = \frac{3}{4}.$$

Από αυτές τις σχέσεις σε συνδυασμό με το Αξίωμα της Κανονικοποίησης

$$P(EE) + P(EA) + P(AE) + P(AA) = 1$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των απλών γεγονότων

$$P(EE) = \frac{5}{12}, \quad P(EA) = \frac{1}{4}, \quad P(AE) = \frac{1}{12}, \quad P(AA) = \frac{1}{4}.$$

Η ζητούμενη δεσμευμένη πιθανότητα είναι

$$P(AE \,|\, \{EA \cup AE\}) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{4}.$$

Άσκηση 8.
Έστω A το γεγονός ότι η παρτίδα θα γίνει αποδεκτή. Τότε ισχύει

$$A = \{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\}$$

όπου $A_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ είναι το γεγονός ότι το i-οστό προϊόν δεν είναι ελαττωματικό.

Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό νόμο για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας έχουμε

$$P(A) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{95}{100} \times \frac{94}{100} \times \frac{93}{98} \times \frac{92}{97} = 0.812\,.$$