

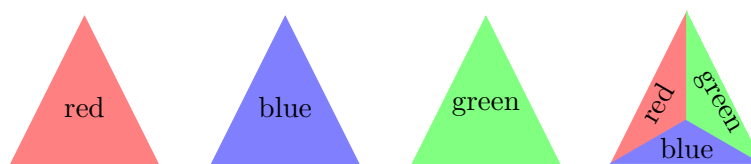
Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
14 Νοεμβρίου 2015 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες

Θέμα 1 - 10 μονάδες. Ένα τετράεδρο έχει τις 4 πλευρές του βαμμένες όπως φαίνεται στο Σχήμα 1: μία είναι βαμμένη όλη κόκκινη, μία είναι μπλε, μία πράσινη και μία βαμμένη κόκκινη, μπλε και πράσινη. Ρίχνουμε το τετράεδρο και η πιθανότητα μία οποιαδήποτε πλευρά του να ακουμπάει στο πάτωμα είναι ίση με $\frac{1}{4}$. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

R = {Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το κόκκινο χρώμα}

B = {Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το μπλε χρώμα}

G = {Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το πράσινο χρώμα}



Σχήμα 1: Οι 4 πλευρές του τετράεδρου του πρώτου θέματος.

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες των γεγονότων R , B και G .

(β) Είναι τα γεγονότα R , B και G ανά δύο ανεξάρτητα;

(γ) Είναι τα γεγονότα R , B και G ανεξάρτητα;

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Η σημασία ενός θετικού τεστ. (Με βάση το βιβλίο Calculated Risks του G. Gigerenzer, Simon & Schuster, 2002 και ένα άρθρο του S. Strogatz στους NYT, 15 Απρ. 2010.)

Γυναίκες ηλικίας μεταξύ 30 και 39 ετών παρουσιάζουν καρκίνο του μαστού με σχετικά χαμηλή πιθανότητα. Το ποσοστό εκτιμάται ίσο με 0.8%. Η μαστογραφία που κάνει μία γυναίκα η οποία έχει καρκίνο στο μαστό είναι θετική με πιθανότητα 90%. Από την άλλη, η μαστογραφία που κάνει μία γυναίκα η οποία δεν έχει καρκίνο στο μαστό είναι θετική με πιθανότητα 7%.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα η μαστογραφία μιας τυχαία επιλεγμένης γυναίκας ηλικίας 30-39, να είναι θετική;

(β) Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα η γυναίκα να έχει καρκίνο δεδομένου ότι η μαστογραφία βγήκε θετική;

(γ) Έστω ένας πληθυσμός 1000 γυναικών ηλικίας 30-39 οι οποίες κάνουν την εξέταση.

(γ-i) Πόσες από αυτές έχουν καρκίνο στο μαστό;

(γ-ii) Υπολογίστε την πιθανότητα σωστής ανίχνευσης (probability of detection, P_d), δηλαδή την πιθανότητα μια γυναίκα να έχει καρκίνο και το τεστ να είναι θετικό. Για πόσες από τις 1000 γυναίκες η εξέταση (μαστογραφία) θα βρει σωστά ότι όντως έχουν καρκίνο;

(γ-iii) Υπολογίστε την πιθανότητα λάθος ανίχνευσης (probability of false alarm, P_{FA}), δηλαδή την πιθανότητα μια γυναίκα να μην έχει καρκίνο και το τεστ να είναι θετικό. Για πόσες από τις 1000 γυναίκες η εξέταση θα δείξει λανθασμένα ότι έχουν καρκίνο;

Με βάση το αποτέλεσμα σχολιάστε το γεγονός ότι στην ιατρική κοινότητα υπάρχει διχογνωμία σχετικά με το κατά πόσο γυναίκες αυτής της ηλικιακής ομάδας πρέπει να υποβάλλονται σε μαστογραφία.

Θέμα 3 - 25 μονάδες. Δύο φίλοι ρίχνουν ο καθένας από ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι. Ορίζουμε την τ.μ. X_1 ως το αποτέλεσμα της ζαριάς του πρώτου και την τ.μ. X_2 ως το αποτέλεσμα της ζαριάς του δεύτερου. Έστω επίσης η τ.μ. $Y = |X_1 - X_2|$, η απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο ρίψεων.

(α) Περιγράψτε το δειγματοχώρο Ω αυτού του πειράματος τύχης αναλυτικά (μέσω μίας μαθηματικής έκφρασης) αλλά και γραφικά.

(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της τ.μ. Y και δώστε την γραφική παράστασή της.

(γ) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[Y]$, και τη διασπορά, $var(Y)$, της τ.μ. Y .

(δ) Έστω η νέα τ.μ. $Z = 10Y - 20$, το κέρδος που μοιράζονται οι δύο παίκτες σε κάθε γύρο παιχνιδιού. (i) Υπολογίστε τη σ.π. της τ.μ. Z . (ii) Με ποια πιθανότητα κερδίζουν οι παίκτες σε κάποιο γύρο; (iii) Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος, $E[Z]$, και τη διασπορά του, $var(Z)$. Συμφέρει αυτό το παιχνίδι;

Θέμα 4 - 20 μονάδες. Ο μικρός αδελφός σας είναι ένας περιπετειώδης τύπος που όμως δεν έχει πάρει ακόμα το μάθημα των πιθανοτήτων. Ακούει ότι στο Las Vegas προσφέρουν ιδιαίτερα επικερδή λαχεία: Κάθε λαχείο κερδίζει με πιθανότητα $p = \frac{1}{50}$ και μπορεί να αγοραστεί για οποιοδήποτε ποσό C δολαρίων επιθυμεί να επενδύσει ο παίκτης. Αν το λαχείο κληρωθεί, ο παίκτης λαμβάνει $X = 100C$ δολάρια. Αν το λαχείο δεν κληρωθεί, ο παίκτης λαμβάνει $X = 0$ δολάρια.

(α) Ο αδελφός σας αποφασίζει να ποντάρει όλες τις οικονομίες του, 100 δολάρια, σε ένα λαχείο. Έστω X το ποσό που λαμβάνει μετά την κλήρωση.

(α-i) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας της τ.μ. X .

(α-ii) Υπολογίστε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της X .

(β) Έχοντας πάρει το HY-217, συμβουλευέτε τον μικρό να ακολουθήσει μία καλύτερη στρατηγική: Να αγοράσει με τα λεφτά του 100 λαχεία για 1 δολάριο το καθένα. Έστω Y το ποσό που θα λάβει μετά την κλήρωση ο αδελφός σας ακολουθώντας αυτή τη στρατηγική.

(β-i) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π. της τ.μ. Y .

(β-ii) Υπολογίστε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της Y .

Συμβουλευάτε όντως σωστά τον μικρό;

Θέμα 5 - 25 μονάδες. Θεωρείστε την ακόλουθη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X και Y :

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x & y = 1, 3; \quad x = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^x & y = 2; \quad x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της $p_{X,Y}(x,y)$. Δείξτε ότι η $p_{X,Y}(x,y)$ είναι μία έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.

(β) Υπολογίστε τις περιθωριακές σ.π. $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y , αντίστοιχα. Είναι οι X και Y ανεξάρτητες;

(γ) Αναγνωρίστε το όνομα της κατανομής της τ.μ. X και την παράμετρο αυτής. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά της, $var(X)$.

(δ) Έστω $Z = 4X - Y^2$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, και τη διασπορά, $var(Z)$, της Z .

(ε) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. $p_{Z/X}(z/x = 1)$.