

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

9ο Φροντιστήριο

Επιμέλεια: Κωνσταντίνα Φωτιάδου

Άσκηση 1. Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2$ και διασπορά $\sigma^2 = 100$: $X \sim N(2, 100)$.

(α) $P(|X| < 8) =$;

(Εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(u)$.)

(β) $E[(X - 4)^2] =$;

Λύση

(α)

$$\begin{aligned} P(|X| < 8) &= P(-8 < X < 8) \\ &= \Phi\left(\frac{8-2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-8-2}{10}\right) \\ &= \Phi(0.6) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(0.6) - (1 - \Phi(1)) \\ &= \Phi(0.6) + \Phi(1) - 1 \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} E[(X - 4)^2] &= E[X^2 - 8X + 16] \\ &= E[X^2] - 8E[X] + 16 \\ &= \text{var}(X) + E^2[X] - 8E[X] + 16 \\ &= 100 + 4 - 8 \cdot 2 + 16 = 104 \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Δύο συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & y \geq 0, \quad |x| + y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. Υπολογίστε τη σταθερά c και τις περιθωριακές σ.π.π. $f_X(x)$ και $f_Y(y)$. Δώστε τη γραφική παράσταση των δύο σ.π.π. Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες;

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $\{X \geq 2Y\}$.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $\{X + Y \geq \frac{1}{2}\}$.

(δ) Υπολογίστε τις δεσμευμένες σ.π.π. $f_{X/Y}(x/y)$ και $f_{Y/X}(y/x)$.

Λύση

- (α) Η περιοχή όπου η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι c φαίνεται στο Σχήμα (1). Πρόκειται για ένα τρίγωνο με βάση 2 και ύψος 1. Για την σταθερά c πρέπει,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1,$$

ή

$$c \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1,$$

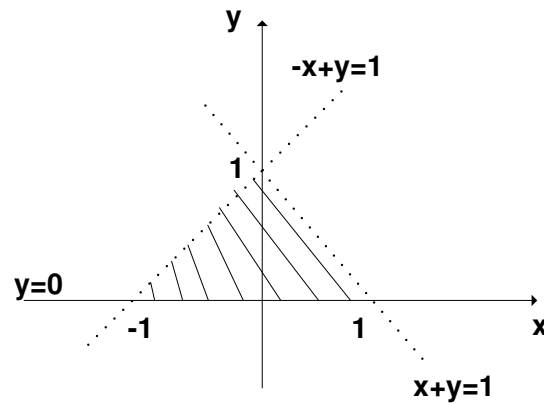
ή

$$c = 1,$$

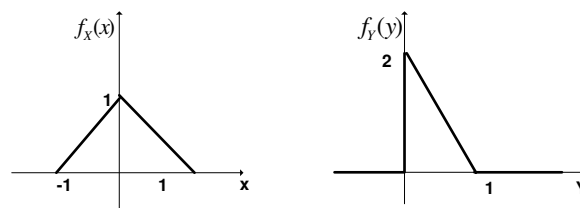
όπου το γινόμενο $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$ είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τριγώνου.

Γενικά ισχύει ότι $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$. Από το Σχήμα (1) φαίνεται ότι,

- Για $-1 \leq x \leq 0$, $f_X(x) = \int_0^{1+x} c dy = 1 + x$
- Για $0 \leq x \leq 1$, $f_X(x) = \int_0^{1-x} c dy = 1 - x$.



Σχήμα 1: 2(a,i).



Σχήμα 2: 2(a,ii).

Άρα,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & , -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

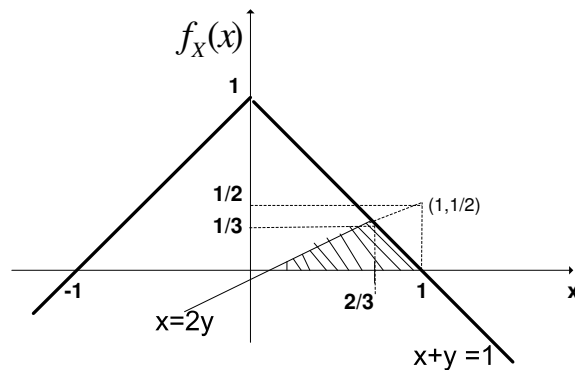
Ομοίως για $0 \leq y \leq 1$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_{y-1}^{1-y} c dx = 2(1-y)$. Δηλαδή,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & , 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

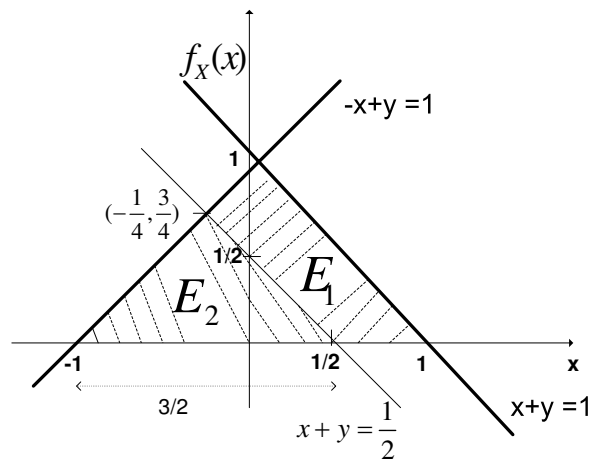
Προφανώς, Σχήμα (2), $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ και οι τυχαίες μεταβλητές XY δεν είναι ανεξάρτητες.

(β) Παρατηρούμε τη γραφική παράσταση του Σχήματος (3). Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας στο γραμμοσκιασμένο τρίγωνο με βάση $(0, 1)$ και ύψος $\frac{1}{3}$ στο σημείο $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ισούται με την πιθανότητα $P(X \geq 2Y)$. Άρα, $P(X \geq 2Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$.

(γ) Ομοίως από το Σχήμα (4) έχουμε ότι,



Σχήμα 3: Ερώτημα (3β).



Σχήμα 4: Ερώτημα (3γ).

$$P(X + Y) \geq \frac{1}{2} = c \cdot E_1 = c \cdot (E - E_2) = 1 \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}) = \frac{7}{16}.$$

(δ)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2(1-y)}, \quad |x| \leq 1-y, \quad 0 < y < 1,$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-|x|}, \quad 0 < y < 1-|x|, \quad |x| \leq 1.$$

Άσκηση 3.

Η ποσότητα X του καφέ που βρίσκεται σε πακέτα 500 γρ. είναι τ.μ. που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 και διασπορά 25, $X \sim N(500, 25)$. Αγοράζουμε τρία πακέτα των 500 γρ. Ποια είναι η πιθανότητα:

- (α) ένα μόνο πακέτο από τα τρία να περιέχει τουλάχιστον 490 γρ. καφέ·
 (β) το καθένα από τα τρία να έχει βάρος μεταξύ 490 και 505 γρ·

Εκφράστε την απάντησή σας βάσει των τιμών $\Phi(2) = 0.9772$ και $\Phi(1) = 0.8413$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

Λύση

Ισχύει το εξής: $X \sim N(500, 25) \Rightarrow Z = \frac{X - 500}{5} \sim N(0, 1)$

(α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X \geq 490) &= P\left(\frac{X - 500}{5} \geq \frac{490 - 500}{5}\right) \\ &= P(Z \geq -2) = 1 - P(Z \leq -2) \\ &= 1 - \Phi(-2) = 0.9772 \end{aligned}$$

Επομένως, θα είναι:

$$P(1 \text{ από τα } 3 \text{ πακέτα έχει βάρος } \geq 490) = \binom{3}{1} (0.9772)^1 (1 - 0.9772)^2 = \underline{0.001524}$$

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(490 \leq X \leq 505) &= P\left(\frac{490 - 500}{5} \leq \frac{X - 500}{5} \leq \frac{505 - 500}{5}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \\ &= 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185 \end{aligned}$$

Επομένως, θα είναι:

$$P(\text{και τα } 3 \text{ πακέτα είναι μεταξύ } 490 \text{ και } 505 \text{ gr}) = (0.8185)^3 = \underline{0.54837}$$

Άσκηση 4. Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1.5 & , 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, 0 \leq x+y < 1 \\ c & , 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, 0 \leq x+y < 2 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού (σ.π.π) και υπολογίστε τη σταθερά c .

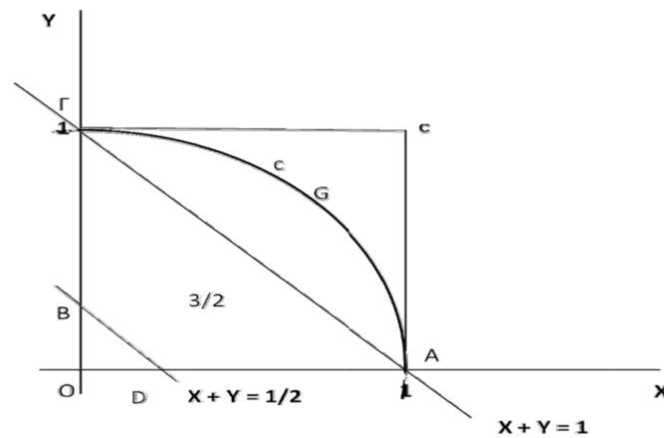
(β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π, $f_Y(y)$, της τ.μ. Y .

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X + Y \leq 1/2)$.

(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X^2 + Y^2 \geq 1)$

Λύση

(α) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της από κοινού (σ.π.π).
 Υπολογίζουμε τη σταθερά c ως εξής:

Σχήμα 5: Το πεδίο τιμών για τις τ.μ (X, Y) της άσκησης 4

$$\frac{3}{2} \cdot E_{OAG} + c \cdot E_{AG\Delta} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + c \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{4} + \frac{c}{2} = 1 \Leftrightarrow c = 1/2$$

(β) Για την περιθωριακή (σ.π.π) ως προς την τ.μ. Y έχουμε:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^{1-y} \frac{3}{2} dx + \int_{1-y}^1 \frac{1}{2} dx \\ &= \frac{3}{2} \cdot x \Big|_0^{1-y} + \frac{1}{2} \cdot x \Big|_{1-y}^1 = \frac{3}{2} \cdot (1-y) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (1-y) = \frac{3}{2} - y \end{aligned}$$

Άρα, έχουμε:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2} - y & , 0 \leq y < 1 \in S \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

(γ) Υπολογίζουμε την πιθανότητα:

$$P(X+Y \leq 1/2) = \frac{3}{2} \cdot E_{OBZ} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2}{2} = \frac{3}{16}$$

(δ) Υπολογίζουμε την πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P(X^2 + Y^2 \geq 1) &= 1 - P(X^2 + Y^2 < 1) = 1 - \frac{3}{2} \cdot E_{OAG} - \frac{1}{2} \cdot E_{AGGA} \\ &= 1 - \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) = 0.108 \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Οι συνεχείς τ.μ X, Y έχουν σύνολο τιμών το γραμμοσκιασμένο χωρίο S που φαίνεται στο σχήμα. Οι X και U έχουν ομοιόμορφη από κοινού κατανομή, δηλαδή η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π), $f_{X,Y}(x,y)$ είναι σταθερή και ίση με $c > 0$ για όλα τα $(x,y) \in S$, και μηδέν αλλού.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & , (x,y) \in S \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

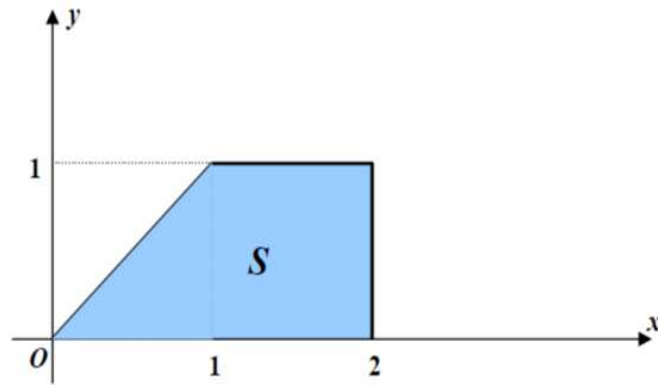
(α) Υπολογίστε τη σταθερά c .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X < 3Y)$.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y < 1/2)$

(δ) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π, $f_X(x)$, της τ.μ. X .

Λύση

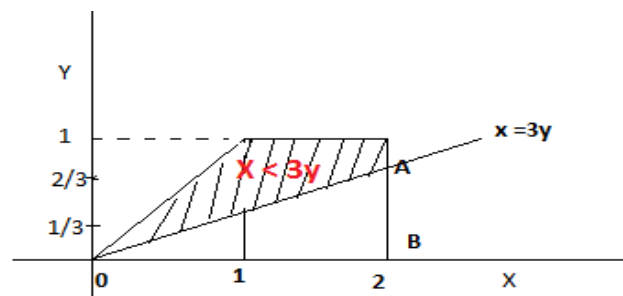
Σχήμα 6: Το πεδίο τιμών για τις τ.μ (X, Y) της άσκησης 5

(α) Πρέπει,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy &= 1 \\ \Rightarrow c \cdot E_s &= 1 \\ \Rightarrow c \cdot \frac{2+1}{2} \cdot 1 &= 1 \\ \Rightarrow c &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται :

$$\begin{aligned} P(X < 3Y) &= \int \int_{x < 3y} f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= 1 - P(X \geq 3Y) = 1 - c \cdot E_{OAB} = 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{2} OB \cdot AB \\ &= 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{2} 2 \frac{2}{3} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} = 0.5556 \end{aligned}$$



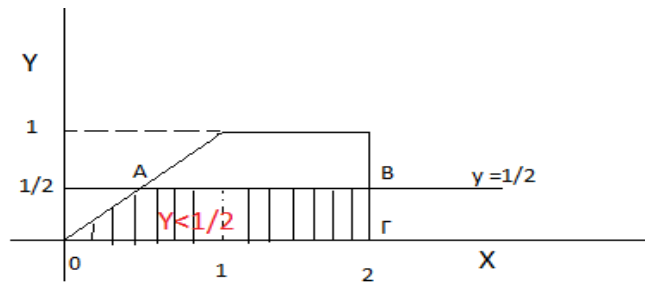
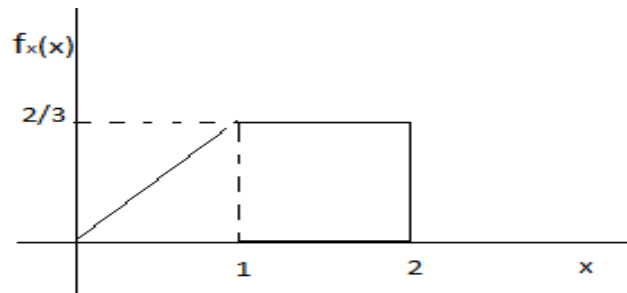
Σχήμα 7: Γραφική παράσταση ερωτήματος (β), άσκησης 5

(γ) Για τη ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζουμε :

$$P(Y < \frac{1}{2}) = c \cdot E_{OAB\Gamma} = \frac{2}{3} \frac{(2 + 1.5)0.5}{2} = \frac{7}{12} = 0.5833$$

(δ)

Για την περιθωριακή σ.π.π της τ.μ X έχουμε :

Σχήμα 8: Γραφική παράσταση ερωτήματος **(γ)**, άσκησης **2**Σχήμα 9: Γραφική παράσταση ερωτήματος **(δ)**, άσκησης **5**

- Για $x < 0$ και $x > 2$:

$$f_X(x) = 0$$

- Για $0 \leq x \leq 1$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^x \frac{2}{3} dy = \left[\frac{2}{3} y \right]_0^x = \frac{2}{3} x$$

- Για $1 \leq x \leq 2$:

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{2}{3} dy = \left[\frac{2}{3} y \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Επομένως,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$