

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 8
Επιμέλεια: Κατερίνα Καραγιαννάκη

Άσκηση 1.

Η τυχαία μεταβλητή X έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.):

$$F_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x \in (-\infty, -3] \\ \frac{1}{3} & x \in (-3, -2) \\ \frac{1}{12}x + \frac{7}{12} & x \in [-2, -1] \\ \frac{1}{16}(x+1)^2 + \frac{1}{2} & x \in (-1, 1) \\ \alpha & x = 1 \\ \beta - \frac{1}{8}e^{-(x-1)} & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

όπου α και β είναι σταθερές.

(α) Υπολογίστε τις σταθερές α και β οι οποίες καθιστούν την $F_X(x)$ μία έγκυρη α.σ.κ.

(β) Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$.

(γ) Τι είδους τ.μ. είναι η X (διακριτή, συνεχής, μεικτή); Γιατί;

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα $P(X < -3)$;

(ε) Ποια είναι η πιθανότητα $P(X = -2)$;

(στ) Ποια είναι η πιθανότητα $P(|X| < 1)$;

Λύση.

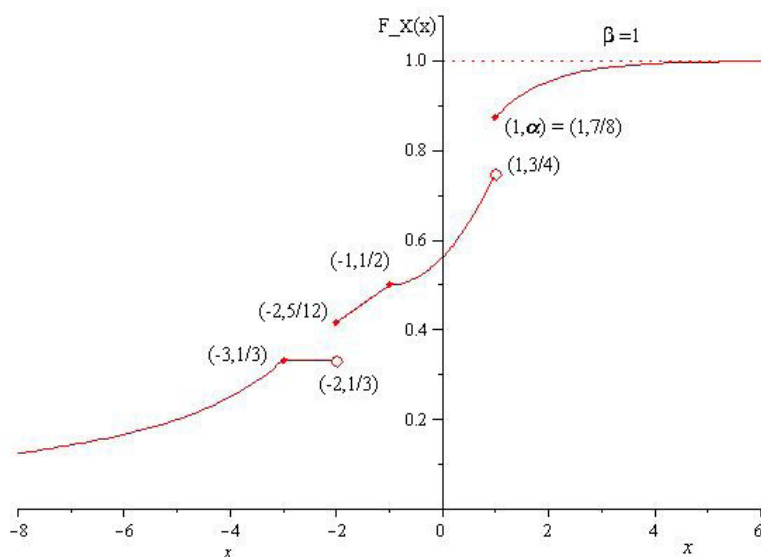
(α) Από τις ιδιότητες της α.σ.κ. $F_X(x)$ έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\beta - \frac{1}{8}e^{-(x-1)} \right) = 1 \Rightarrow \beta = 1.$$

Επίσης, η $F_X(x)$ είναι συνεχής από δεξιά:

$$\alpha = F_X(1) = F_X(1^+) = 1 - \frac{1}{8}e^{-(1-1)} \Rightarrow \alpha = \frac{7}{8}.$$

(β) Η γραφική παράσταση της $F_X(x)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



(γ) Όπως βλέπουμε στη γραφική παράσταση της $F_X(x)$, αυτή έχει τμήματα στα οποία είναι συνεχής αλλά έχει και δύο σημεία ασυνέχειας, τα $x = -2$ και $x = 1$. Επομένως, η τ.μ. X είναι μικτή. Παίρνει δε τις τιμές -2 και 1 με μη μηδενικές πιθανότητες:

$$P(X = -2) = F_X(-2^+) - F_X(-2^-) = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12} = 0.0833.$$

και

$$P(X = 1) = F_X(1^+) - F_X(1^-) = \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

$$\textbf{(δ)} \quad P(X < -3) = F_X(-3^-) = \frac{1}{3}.$$

$$\textbf{(ε)} \quad P(X = -2) = F_X(-2) - F_X(-2^-) = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

$$\textbf{(στ)} \quad P(|X| < 1) = P(-1 < X < 1) = F_X(1^-) - F_X(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Άσκηση 2. Ο Χρήστος και ο Ανδρέας μοιράζονται τον ίδιο υπολογιστή. Ο Χρήστος χρησιμοποιεί τον υπολογιστή για να ελέγξει το e-mail του κάθε 30 λεπτά, στις xx:15 και xx:45 κάθε ώρας. Στις 6:00 το απόγευμα ο Ανδρέας αποφασίζει να χρησιμοποιήσει τον υπολογιστή για μία εργασία του. Η εργασία θα πάρει ένα χρονικό διάστημα που μοντελοποιείται από μία εκθετική τ.μ. T με παράμετρο $\lambda = 1/60$, δηλαδή $T \sim \text{Exp}(1/60)$ (σε λεπτά της ώρας). Ο Χρήστος δεν μπορεί να ελέγξει το e-mail του όσο ο Ανδρέας εργάζεται στον υπολογιστή.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος θα χάσει έναν ή περισσότερους προγραμματισμένους ελέγχους του e-mail του.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος θα χάσει ακριβώς τρεις προγραμματισμένους ελέγχους του e-mail του.

Λύση

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι να χρησιμοποιήσει ο Ανδρέας τον υπολογιστή πάνω από 15 λεπτά. Εφόσον $T \sim \text{Exp}(1/60)$ λεπτά είναι ο χρόνος που περνάει ο Ανδρέας στον υπολογιστή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(T > 15) = \int_{15}^{\infty} \frac{1}{60} e^{-t/60} dt = e^{-1/4}$$

(β) Αν ο Χρήστος χάσει ακριβώς μια φορά να ελέγξει τα emails του, τότε $15 \leq T < 45$. Αν χάσει ακριβώς 2 φορές να ελέγξει τα emails του, τότε $45 \leq T < 75$. Γενικά, αν δεν ελέγξει τα emails του n φορές τότε: $15 + 30(n-1) \leq T < 30n + 15$.

Α' τρόπος Για $n = 3$ ζητείται η πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P(75 \leq T < 105) &= \\ P(T < 105) - P(T \leq 75) &= \\ 1 - P(T > 105) - (1 - P(T \leq 75)) &= \\ P(T \leq 75) - P(T > 105) \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι για την Εκθετική τ.μ. ισχύει $P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$, επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{60}75} - e^{-\frac{1}{60}105} &= \\ e^{-\frac{5}{4}} - e^{-\frac{7}{4}} \end{aligned}$$

Β' τρόπος Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

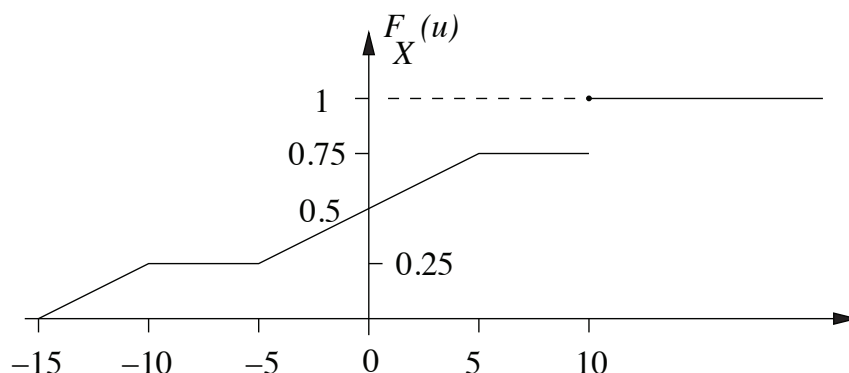
$$P(\{15 + 30(n-1) \leq T < 30n + 15\}) = \int_{30n-15}^{30n+15} \frac{1}{60} e^{-\frac{t}{60}} dt = e^{-\frac{n}{2}} (e^{\frac{1}{4}} - e^{-\frac{1}{4}})$$

Οπότε η πιθανότητα να χάσει $n = 3$ emails είναι

$$\begin{aligned} e^{-\frac{3}{2}} (e^{\frac{1}{4}} - e^{-\frac{1}{4}}) &= \\ e^{-\frac{5}{4}} - e^{-\frac{7}{4}} \end{aligned}$$

Άσκηση 3 (α) Έστω η τ.μ. $Z = (X + Y)^2$, όπου X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους Γκαουσιανές τ.μ. με $\mu_X = 0$, $\mu_Y = 1$, $\text{var}(X) = 1$, και $\text{var}(Y) = 3$. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Z \leq 9)$ εκφράζοντας την απάντησή σας με βάση τιμές της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, Φ .

(β) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$ της τ.μ. X φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$ της τ.μ. X .

Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες:

(β-i) $P(X \leq 10)$.

(β-ii) $P(X \geq -7)$.

(β-iii) $P(|X| < 10)$.

(β-iv) $P(X^2 \geq 16)$.

Λύση

(α) $P(Z \leq 9) = P((X + Y)^2 \leq 9) = P(-3 \leq X + Y \leq 3)$.

Αλλά $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 3)$ και συνεπώς $X + Y \sim N(0 + 1, 1 + 3) \equiv N(1, 4)$.

Επομένως,

$$\begin{aligned} P(Z \leq 9) &= P((X + Y)^2 \leq 9) = \\ &= P(-3 \leq X + Y \leq 3) = \\ &= P\left(\frac{-3 - 1}{2} \leq \frac{X + Y - 1}{2} \leq \frac{3 - 1}{2}\right) = \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \end{aligned}$$

(β) Διαβάζουμε απ' ευθείας από το Σχήμα 1:

$$(\beta\text{-i}) P(X \leq 10) = F_X(10) = 1$$

$$(\beta\text{-ii}) P(X \geq -7) = 1 - P(X < -7) = 1 - F_X(-7) = 1 - 0.25 = 0.75$$

$$(\beta\text{-iii}) P(|X| < 10) = P(-10 < X < 10) = F_X(10^-) - F_X(-10^-) = 0.75 - 0.25 = 0.5$$

$$(\beta\text{-iv}) P(X^2 \geq 16) = P(X \geq 4 \cup X \leq -4) = P(X \geq 4) + P(X \leq -4) \\ = 1 - P(X < 4) + P(X \leq -4) = 1 - F_X(4) + F_X(-4) = 1 - 0.7 + 0.3 = 0.6$$

Άσκηση 4

(α) Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2$ και διασπορά $\sigma^2 = 25$: $X \sim N(2, 25)$. Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$:

$$(\alpha 1) P(|X - 4| > 3).$$

$$(\alpha 2) P(X < 3 / X > 2).$$

(β) Ένα στατιστικό μοντέλο που έχει προταθεί για το επαγγελματικό πρωτάθλημα μπάσκετ των ΗΠΑ προβλέπει ότι όταν συναντώνται δύο σχετικά ισοδύναμες ομάδες, ο αριθμός των πόντων που σκοράρει σε μία περίοδο η εντός έδρας ομάδα μείον τον αριθμό των πόντων που σκοράρει η φιλοξενούμενη ομάδα είναι μία κανονική τ.μ. με μέση τιμή 1.5 και διασπορά 6. Επίσης, το μοντέλο υποθέτει ότι οι διαφορές σκοραρίσματος κατά τις 4 περιόδους είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Στη συνέχεια, εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$.

(β1) Ποια η πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα;

(β2) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο ημίχρονο είναι πίσω στο σκορ κατά 5 πόντους;

(β3) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο τέλος της πρώτης περιόδου προηγείται με 5 πόντους;

Λύση

(α1)

$$P(|X - 4| > 3) = P(X - 4 > 3 \text{ ή } X - 4 < -3) = P(X > 7 \text{ ή } X < 1) = P(X > 7) + P(X < 1) = \\ = 1 - P\left(\frac{X - 2}{5} < \frac{7 - 2}{5}\right) + P\left(\frac{X - 2}{5} < \frac{1 - 2}{5}\right) = 1 - \Phi(1) + \Phi(-0.2) = 2 - \Phi(1) - \Phi(0.2) = 0.5794$$

(α2)

$$P(X < 3 / X > 2) = \frac{P(X < 3 \cap X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{P(2 < X < 3)}{P(X > 2)} = \frac{P\left(\frac{2-2}{5} < \frac{X-2}{5} < \frac{3-2}{5}\right)}{1 - P\left(\frac{X-2}{5} < \frac{2-2}{5}\right)} \\ = \frac{\Phi(0.2) - \Phi(0)}{1 - \Phi(0)} = \frac{\Phi(0.2) - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(\Phi(0.2) - 0.5) = 0.1586.$$

(β)

Έστω X_i η διαφορά των πόντων κάθε περιόδου, $i = 1, 2, 3, 4$. Τότε $X_i \sim N(1.5, 6)$ και οι X_i είναι ανεξάρτητες Γκαουσιανές τ.μ.

(β1)

$$P(\beta 1) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0\right)$$

Αλλά

$$\sum_{i=1}^4 X_i \sim N(4 \times 1.5, 4 \times 6) \equiv N(6, 24)$$

Συνεπώς,

$$P(\beta 1) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^4 X_i - 6}{\sqrt{24}} > \frac{0 - 6}{\sqrt{24}}\right) = 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^4 X_i - 6}{\sqrt{24}} < \frac{0 - 6}{\sqrt{24}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{24}}\right) = \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{24}}\right) = 0.8897$$

(β2)

$$P(\beta 2) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0 / X_1 + X_2 = -5\right) = P(-5 + X_3 + X_4 > 0) = P(X_3 + X_4 > 5)$$

Αλλά $X_3 + X_4 \sim N(3, 12)$, συνεπώς:

$$P(\beta 2) = P\left(\frac{X_3 + X_4 - 3}{\sqrt{12}} > \frac{5 - 3}{\sqrt{12}}\right) = 1 - P\left(\frac{X_3 + X_4 - 3}{\sqrt{12}} < \frac{5 - 3}{\sqrt{12}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right) = 0.2818$$

(β3)

$$P(\beta 3) = P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 0 / X_1 = 5\right) = P(5 + X_2 + X_3 + X_4 > 0) = P(X_2 + X_3 + X_4 > -5)$$

Αλλά $X_2 + X_3 + X_4 \sim N(4.5, 18)$, οπότε:

$$\begin{aligned} P(\beta 3) &= P\left(\frac{X_2 + X_3 + X_4 - 4.5}{\sqrt{18}} > \frac{-5 - 4.5}{\sqrt{18}}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{X_2 + X_3 + X_4 - 4.5}{\sqrt{18}} < \frac{-5 - 4.5}{\sqrt{18}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{-9.5}{\sqrt{18}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{9.5}{\sqrt{18}}\right) = 0.9874 \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 10$ και διασπορά $\sigma^2 = 16$: $X \sim N(10, 16)$. Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$:

(α) $P(X \geq 15)$.

(β) $P(X \leq 5)$.

(γ) $P(X^2 \geq 400)$.

(δ) $P(X = 2)$.

Λύση

(α) $P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{15 - 10}{4}\right) = 1 - \Phi(5/4) = 0.1056$

(β) $P(X \leq 5) = P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{5 - 10}{4}\right) = \Phi(-5/4) = 1 - \Phi(5/4) = 0.1056$

(γ) $P(X^2 \geq 400) = P(X \geq 20 \cup X \leq -20) = P(X \geq 20) + P(X \leq -20) =$
 $= 1 - P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{20 - 10}{4}\right) + P\left(\frac{X - 10}{4} \leq \frac{-20 - 10}{4}\right) = 1 - \Phi(10/4) + \Phi(-30/4) =$
 $= 2 - \Phi(10/4) - \Phi(30/4) = 0.0062$

(δ) $P(X = 2) = 0$ καθώς η τ.μ. X είναι συνεχής.

Άσκηση 6

Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2$ και διασπορά $\sigma^2 = 100$: $X \sim N(2, 100)$.

(α) $P(|X| < 8) =$;

(Εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(u)$.)

(β) $E[(X - 4)^2] =$.

(γ) Έστω η τ.μ. $Y = (X - 2)^2$. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της Y .

Λύση

(α)

$$\begin{aligned}
 P(|X| < 8) &= P(-8 < X < 8) \\
 &= P(X < 8) - P(X < -8) \\
 &= \Phi\left(\frac{8-2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-8-2}{10}\right) \\
 &= \Phi(0.6) - \Phi(-1) \\
 &= \Phi(0.6) - (1 - \Phi(1)) \\
 &= \Phi(0.6) + \Phi(1) - 1
 \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[(X - 4)^2] &= \mathbf{E}[X^2 - 8X + 16] \\
 &= \mathbf{E}[X^2] - 8\mathbf{E}[X] + 16 \\
 &= \text{var}(X) + \mathbf{E}^2[X] - 8\mathbf{E}[X] + 16 \\
 &= 100 + 4 - 8 \cdot 2 + 16 = 104
 \end{aligned}$$

(γ) Εφόσον $Y = (X - 2)^2$, η Y παίρνει μη αρνητικές τιμές, οπότε $f_Y(y) = 0$ για $y < 0$. Για $y \geq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P((X - 2)^2 \leq y) \\
 &= P(-\sqrt{y} \leq X - 2 \leq \sqrt{y}) \\
 &= P(2 - \sqrt{y} \leq X \leq 2 + \sqrt{y}) \\
 &= P(X \leq 2 + \sqrt{y}) - P(X \leq 2 - \sqrt{y}) \\
 &= \Phi\left(\frac{2 + \sqrt{y} - 2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{2 - \sqrt{y} - 2}{10}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{y}}{10}\right) \\
 &= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right) - 1
 \end{aligned}$$

οπότε:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = 2 \frac{d}{dy} \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right)$$

Αλλά η $\Phi(u)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής γκαουσιάνης και συνεπώς

$$\frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$

. Έτσι:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y}/10)^2} \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{\sqrt{y}}{10} \right) \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/200} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}10} \\ &= \frac{1}{10\sqrt{2\pi y}} e^{-y/200}, y \geq 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 7 Η τ.μ. X είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\lambda > 0$. Υπολογίστε τα ακόλουθα συναρτήσεσι του λ .

(α) $E[X^2]$.

(β) $P(\lfloor X^2 \rfloor = 3)$, όπου $\lfloor u \rfloor$ είναι το ακέραιο μέρος του u .

(γ) Ορίζουμε την τ.μ. $Y = e^{-X}$. Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$, της Y .

(δ) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της Y .

Λύση

(α) $X \sim \exp(\lambda)$, $E[X] = 1/\lambda$, $\text{var}(X) = 1/\lambda^2$, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Συνεπώς $E[X^2] = E^2[X] + \text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$.

(β)

$$\begin{aligned} P(\lfloor X^2 \rfloor = 3) &= P(3 \leq X^2 < 4) = P(\sqrt{3} \leq X < 2) \\ &= \int_{\sqrt{3}}^2 f_X(x) dx = F_X(2) - F_X(\sqrt{3}) = e^{-\sqrt{3}\lambda} - e^{-2\lambda}. \end{aligned}$$

(γ) Η τ.μ. Y παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, 1]$.

Για $0 < y \leq 1$:

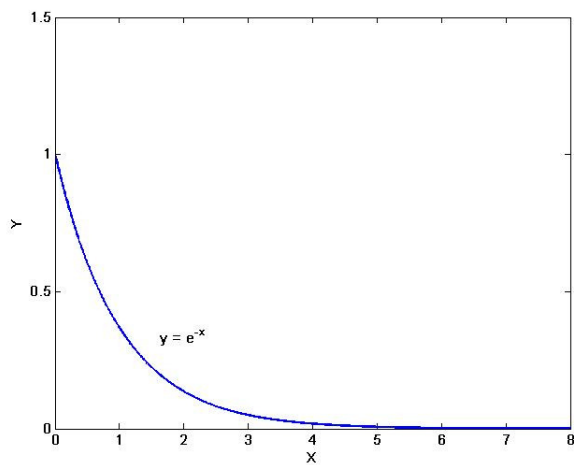
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^{-X} \leq y) = P(-X \leq \ln y) = P(X \geq -\ln y) = 1 - F_X(-\ln y) = e^{\lambda \ln y} = y^\lambda.$$

Για $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$.

Για $y \geq 1$, $F_Y(y) = 1$.

Συνεπώς,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \leq 0 \\ y^\lambda & , 0 < y \leq 1 \\ 1 & , y \geq 1. \end{cases}$$



(6) $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \lambda y^{\lambda-1}, 0 < y \leq 1.$

