

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 6
Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές
Επιμέλεια: Σοφία Σαββάκη

Άσκηση 1.

Η εταιρεία Αττικό μετρό δημιουργεί τους σταθμούς ΗΣΑΠ στη γραμμή Πειραιάς-Κηφισιά με τον εξής αλγόριθμο: Στο μηχανοστάσιο του Πειραιά υπάρχουν συνολικά 6 βαγόνια. Αν ένα βαγόνι λειτουργεί, τότε προστίθεται στο συρμό. Αν δε λειτουργεί, τότε παραμένει στο μηχανοστάσιο. Ένα τυχαία επιλεγμένο βαγόνι λειτουργεί με πιθανότητα $2/3$, ανεξάρτητα από όλα τα υπόλοιπα. Ορίζουμε την τ.μ. X ως το μήκος του συρμού, δηλαδή το πλήθος των βαγονιών που τον αποτελούν.

- (α') Ποια είναι η κατανομή της τ.μ. X ; Δώστε την πλήρη μαθηματική περιγραφή της συνάρτησης πιθανότητας της X .
- (β') Ποιο είναι το αναμενόμενο μήκος του συρμού, $E[X]$;
- (γ') Ποια είναι η πιθανότητα ότι δεν υπάρχει συρμός στη γραμμή Πειραιάς - Κηφισιά;
- (δ') Το πλήθος των επιβατών που μπορούν να χωρέσουν στο συρμό είναι ίσο με $50X$ (δηλαδή κάθε βαγόνι χωρά 50 επιβάτες). Έστω η τ.μ. Y που περιγράφει το πλήθος των επιβατών που θέλουν να ταξιδέψουν με το συρμό. Η Y ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 101 και 200, δηλαδή:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/100, & y = 101, 102, \dots, 200 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος:

$$A = \{\text{Ο συρμός μπορεί να μεταφέρει όλους τους επιβάτες που επιθυμούν να ταξιδέψουν}\}$$

Λύση.

- (α') Από τη θεωρία μας γνωρίζουμε για τη Διωνυμική τ.μ.: Ένα νόμισμα ρίχνεται n φορές. Σε κάθε δοκιμή και ανεξάρτητα από τις άλλες, έρχεται A με πιθανότητα p και $\bar{A}$ με πιθανότητα $1 - p$. Έστω ότι X είναι ο αριθμός των A σε μια n -ακολουθία ρίψεων. Λέμε ότι η X είναι μια Διωνυμική (Binomial) τ.μ. με παραμέτρους n και p .

Διωνυμική τυχαία μεταβλητή

PMF:

$$p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Προφανώς,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} = 1$$

Από την εκφώνηση, αναγνωρίζουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με $n = 6$ και $p = 2/3$.

$$X \sim \Delta(n = 6, p = 2/3).$$

Η σ.π. είναι

$$p_X(k) = \binom{6}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k}; \quad k = 0, 1, \dots, 6.$$

(β') Από τη θεωρία μας γνωρίζουμε για Διωνυμική τ.μ. X με παραμέτρους n, p ισχύει ότι $E[X] = n \cdot p = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ βαγόνια.

(γ') $P(\{\text{δεν υπάρχει συρμός}\}) = P(X = 0) = p_X(0) = \binom{6}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729} = 0.001372.$

(δ') Προφανώς το A συμβαίνει όταν

$$\underbrace{Y}_{\text{πλήθος επιβατών που επιθυμούν να ταξιδέψουν}} \leq \underbrace{50X}_{\text{πλήθος επιβατών που μπορούν να χωρέσουν στο συρμό}}$$

Καθώς η X (πλήθος βαγονιών που χωράνε στο συρμό) παίρνει τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, η $50X$ παίρνει τις τιμές 0, 50, 100, 150, 200, 250, 300. Η τ.μ. Y παίρνει τις τιμές 101, 102, ..., 200. Παρατηρούμε τα εξής:

- (i)** Όταν ο συρμός έχει $X = 4, 5$, ή 6 βαγόνια, η $50X$ παίρνει τις τιμές 200, 250, 300 και αφού $Y = 101, \dots, 200$, ισχύει πάντα ότι $Y \leq 50X$. Δηλαδή με 4, 5 ή 6 βαγόνια *όλοι* οι ταξιδιώτες εξυπηρετούνται.
- (ii)** Όταν ο συρμός έχει $X = 0, 1$, ή 2 βαγόνια, η $50X$ παίρνει τις τιμές 0, 50, 100 και αφού $Y = 101, \dots, 200$, ισχύει πάντα ότι $Y > 50X$. Δηλαδή με 0, 1 ή 2 βαγόνια δε μπορούν να εξυπηρετηθούν *όλοι* οι ταξιδιώτες.
- (iii)** Όταν ο συρμός έχει $X = 3$ βαγόνια, η τ.μ. Y παίρνει την τιμή 150 και αφού $Y = 101, \dots, 200$, η $Y \leq 50X$ ικανοποιείται μόνο για τις τιμές $101 \leq Y \leq 200$. Δηλαδή, με 3 βαγόνια εξυπηρετούνται *όλοι* οι ταξιδιώτες, μόνον αν το πλήθος των επιβατών που επιθυμούν να ταξιδέψουν είναι $101 \leq Y \leq 200$.

Συνεπώς, από τα **(i),(ii),(iii)** έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X = 3) \cdot P(101 \leq Y \leq 150) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \\ &= p_X(3) \cdot \sum_{i=101}^{150} \frac{1}{100} + p_X(4) + p_X(5) + p_X(6) \\ &= \binom{6}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \binom{6}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{6}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ &= \dots \\ &= 0.68. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Ρίχνουμε δύο δίκαια *τριεδρα* ζάρια. Ορίζουμε τη τ.μ. X ως το άθροισμα των δύο ρίψεων.

- (α') Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, $p_X(x)$, τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά, $var(X)$, της τ.μ. X .
- (β') Σε ένα παιχνίδι τύχης, πληρώνετε a ευρώ για το δικαίωμα να ρίξετε μία φορά τα ζάρια κερδίζοντας $5X$ ευρώ. Ποια τιμή για το a καθιστά αυτό το παιχνίδι *δίκαιο*, δηλαδή ένα παιχνίδι στο οποίο κατά μέσο όρο παίρνετε πίσω ό,τι πληρώσατε;

Λύση.

- (α') Ο δειγματοχώρος Ω του πειράματος αποτελείται από τα ισοπίθανα, 9 το πλήθος, διατεταγμένα ζεύγη:

$$\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Ω	X	$p_X(x)$
(1,1)	2	$1/9$
(1,2)	3	$2/9$
(2,1)	3	$2/9$
(1,3)	4	$3/9$
(2,2)	4	$3/9$
(3,1)	4	$3/9$
(2,3)	5	$2/9$
(3,2)	5	$2/9$
(3,3)	6	$1/9$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & x = 2 \\ \frac{2}{9}, & x = 3 \\ \frac{3}{9}, & x = 4 \\ \frac{2}{9}, & x = 5 \\ \frac{1}{9}, & x = 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής για μια διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας $p_X(x)$ γνωρίζουμε ότι:

$$E[X] = \sum_x x \cdot p_X(x)$$

Άρα εδώ:

$$E[X] = \frac{1}{9}(2 + 6) + \frac{2}{9}(3 + 5) + \frac{3}{9}4 = 4$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς γνωρίζουμε ότι

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \mu_X^2$$

Άρα εδώ:

$$E[X^2] = \frac{1}{9}(2^2 + 6^2) + \frac{2}{9}(3^2 + 5^2) + \frac{3}{9}4^2 = \frac{156}{9}$$

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{156}{9} - 4^2 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

- (β') Αφού πληρώνουμε $a \in \mathbb{R}$ για να κερδίσουμε $5X$, το παιχνίδι είναι δίκαιο όταν:

$$E[5X - a] = 0 \Rightarrow 5E[X] - a = 0 \Rightarrow 5E[X] = a \Rightarrow a = 20 \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 3.

Η μέση ημερήσια θερμοκρασία στη Θεσσαλονίκη το μήνα Μάρτιο, μετρούμενη σε ακέραιους βαθμούς Κελσίου είναι μια τ.μ. X με την ακόλουθη Συνάρτηση Πιθανότητας:

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{20} |k - 10|, & 10 - b \leq k \leq 10 + b \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α') Υπολογίστε τη σταθερά b και δώστε τη γραφική παράσταση της Σ.Π. της τ.μ. X

Βοήθεια: Παρατηρήστε τη συμμετρία της Σ.Π. της X και χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\sum_{i=1}^b i = \frac{b(b+1)}{2}$.

(β') Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή, $E[X]$ και η διασπορά, $var(X)$ της X ;

(γ') Το κόστος σε Ευρώ της θέρμανσης ενός σπιτιού το μήνα Μάρτιο είναι

$$Y = 10(25 - X)^2$$

Υπολογίστε το μέσο κόστος, $E[Y]$.

(δ') Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(10 \leq X \leq 12 / 10 \leq X \leq 15)$.

(ε') Ορίστε τα εξής γεγονότα:

$$A = \{\text{Η μέση ημερήσια θερμοκρασία είναι } X \leq 10\}$$

$$B = \{\text{Υπάρχουν τουλάχιστον 12 συνεφιασμένες μέρες μέσα στο Μάρτιο}\}$$

Έστω ότι τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα και $P(B) = 0.3$.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A^c \cap B^c)$.

Λύση.

(α') Για να είναι η $p_X(k)$ μια έγκυρη σ.π. πρέπει

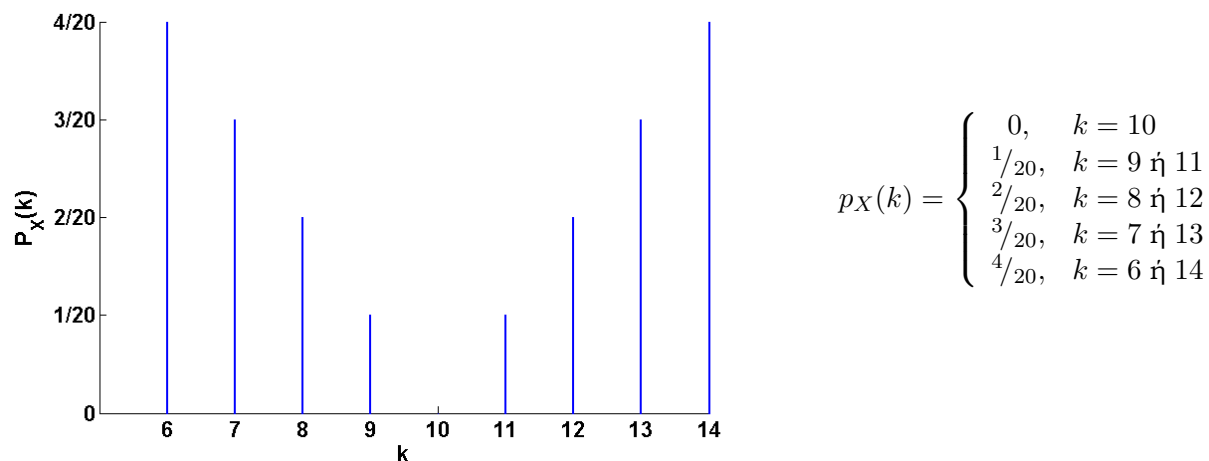
$$\sum_{k=10-b}^{10+b} p_X(k) = 1$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{k=10-b}^{10+b} \frac{1}{20} |k - 10| &= 2 \cdot \sum_{k=11}^{10+b} \frac{1}{20} (k - 10) && [\text{λόγω συμμετρίας της } p_X(k) \text{ γύρω από το } k = 10] \\ &= 2 \cdot \sum_{m=1}^b \frac{1}{20} m = \frac{1}{10} \sum_{m=1}^b m && [m = k - 10] \\ &= \frac{1}{10} \frac{b(b+1)}{2} = \frac{b(b+1)}{20} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = 4$$

Η γραφική παράσταση της $p_X(k)$ φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση και η Σ.Π. για το υποερώτημα **3(α)**.

(β') Προφανώς λόγω συμμετρίας της $p_X(k)$ γύρω από το $k = 10$,

$$E[X] = 10.$$

Επίσης,

$$E[X^2] = \sum_k k^2 p_X(k) = 10^2 \cdot 0 + (9^2 + 11^2) \cdot \frac{1}{20} + (8^2 + 12^2) \cdot \frac{2}{20} + (7^2 + 13^2) \cdot \frac{3}{20} + (6^2 + 14^2) \cdot \frac{4}{20} = 110$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 110 - 10^2 = 10$$

(γ') Διατήρηση της γραμμικότητας για τη μέση τιμή: Αν $Y = aX + b$, τότε $E[Y] = aE[X] + b$.

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[10 \cdot (25 - X)^2] \\ &= E[6250 - 500 \cdot X + 10 \cdot X^2] \\ &= 6250 - 500 \cdot E[X] + 10 \cdot E[X^2] \\ &= 6250 - 500 \cdot 10 + 10 \cdot 110 = 2350 \text{ €}. \end{aligned}$$

(δ')

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 12 | 10 \leq X \leq 15) &= \frac{P(10 \leq X \leq 12 \cap 10 \leq X \leq 15)}{P(10 \leq X \leq 15)} \\ &= \frac{P(10 \leq X \leq 12)}{P(10 \leq X \leq 15)} \\ &= \frac{0 + 1/20 + 2/20}{0 + 1/20 + 2/20 + 3/20 + 4/20 + 0} \\ &= \frac{3/20}{10/20} = 0.3 \end{aligned}$$

(ε') Τα A και B είναι ανεξάρτητα, συνεπώς και τα A^c και B^c είναι ανεξάρτητα.

Από εκφώνηση έχουμε

$$P(B) = 0.3 \Rightarrow P(B^c) = 0.7$$

Από τη συμμετρία της $p_X(k)$ γύρω από το $k = 10$, έχουμε

$$P(A) = 0.5 \Rightarrow P(A^c) = 0.5$$

Τελικά,

$$P(A^c B^c) = P(A^c)P(B^c) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35$$

Άσκηση 4.

Έχετε στα χέρια σας ένα δίκαιο 6-εδρο ζάρι και ένα δίκαιο κέρμα. Ρίχνετε πρώτα το ζάρι και έστω X ο αριθμός που έρχεται. Στη συνέχεια, ρίχνετε το κέρμα X φορές και έστω ότι εμφανίζονται Y κεφαλές.

(α') Ποια είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p_{Y/X}(y/x)$; Δώστε την πλήρη μαθηματική περιγραφή της.

(β') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y = 3 / X = 6)$.

(γ') Ποια είναι η Συνάρτηση Πιθανότητας της τ.μ. X ;

(δ') Υπολογίστε την από κοινού Σ.Π. $p_{X,Y}(x, y)$ των τ.μ. X και Y .

(ε') Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος να εμφανιστούν μόνο κεφαλές, δηλαδή $P(X = Y)$.

Λύση.

(α') Δεδομένου ότι φέρνουμε $X = x$ στη ρίψη του 6-εδρου δίκαιου ζαριού, ρίχνουμε το κέρμα x φορές και το πλήθος Y των κεφαλών που εμφανίζονται ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = x$ και $p = \frac{1}{2}$:

$$Y/\{X = x\} \sim \Delta(x, \frac{1}{2})$$

Συνεπώς,

$$P_{Y/X}(y/x) = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{x-y} = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq x.$$

(β') $P(Y = 3 / X = 6) = P_{Y/X}(y = 3 / x = 6) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} = 0.3125$.

(γ') Προφανώς, η X είναι διακριτή ομοιόμορφη τ.μ. στο πεδίο τιμών $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(δ') Γνωρίζουμε ότι η δεσμευμένη Σ.Π. συχνά είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό της από κοινού Σ.Π. μέσω του Πολλαπλασιαστικού νόμου:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_Y(y \cdot p_{X/Y}(x/y)) \\ &= p_X(x) \cdot p_{Y/X}(y/x) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η από κοινού Σ.Π. των X και Y είναι:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x,y) &= p_X(x) \cdot p_{Y|X}(y|x) \\ &= \frac{1}{6} \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 1 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq x. \end{aligned}$$

(ε) Η πιθανότητα του γεγονότος να εμφανιστούν μόνο κεφαλές είναι

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{i=1}^6 p_{X,Y}(i,i) \quad (x=i, y=i) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \binom{i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right] = 0.164. \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

(α) Υπολογίστε το $E[X^2]$ για μια *Poisson* με μέση τιμή ίση με 5.

(β) Αν η Y είναι Γεωμετρική τ.μ. με μέση τιμή 4, υπολογίστε το $var(2-3Y)$.

(γ) Η τ.μ. Z δηλώνει τον αριθμό των εμφανίσεων ενός γεγονότος A με πιθανότητα εμφάνισης p , σε 10 ανεξάρτητες δοκιμές. Ποια είναι η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. Z , δεδομένου ότι το γεγονός A εμφανίστηκε 4 φορές στις πρώτες 6 δοκιμές;

Λύση.

(α) Για την *Poisson* τ.μ. γνωρίζουμε ότι $E[X] = var(X) = \lambda$.

Άρα εδώ,

$$E[X] = var(X) = 5$$

Επίσης, για τον υπολογισμό της διασποράς γνωρίζουμε ότι $var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

$$\Rightarrow E[X^2] = var(X) + (E[X])^2 = \lambda + \lambda^2 = 5 + 5^2 = 30$$

(β) Η Γεωμετρική τ.μ. έχει $E[Y] = \frac{1}{p}$, $var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι αν $Y = aX + b$, τότε $var(Y) = a^2 var(X)$.

Συνεπώς εδώ,

$$E[Y] = \frac{1}{p} = 4 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

και

$$var(2-3Y) = (-3)^2 var(Y) = 9 var(Y) = 9 \frac{1-p}{p^2} = 9 \frac{1-\frac{1}{4}}{(\frac{1}{4})^2} = 108$$

(γ) Προφανώς, $Z \sim \Delta(n=10, p)$ και επομένως η αδέσμευτη μέση τιμή της Z είναι $E[Z] = 10p$ (αφού για Διωνυμική τ.μ X γνωρίζουμε από θεωρία ότι $E[X] = np$).

Τώρα, δεδομένου του A έχουμε ότι $Z = 4 + Y$ όπου $Y \sim \Delta(n=4, p)$.

Δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση έχουμε σίγουρα 4 εμφανίσεις στις πρώτες 6 δοκιμές και Y εμφανίσεις στις τελευταίες 4 δοκιμές, όπου προφανώς $Y \sim \Delta(n=4, p)$, με $E[Y] = np = 4p$.
Άρα,

$$E[Z/A] = E[4+Y] = 4 + E[Y] = 4 + 4p$$

(Διατήρηση της γραμμικότητας για τη μέση τιμή: Αν $Y = aX + b$ τότε $E[Y] = aE[X] + b$.)