

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

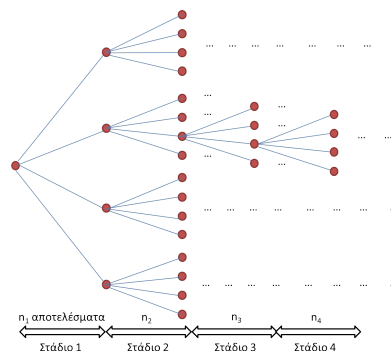
Φροντιστήριο 4 - Συνδυαστική Ανάλυση
Επιμέλεια: Σοφία Σαββάκη

Θεωρία.

Η βασική αρχή της απαρίθμησης (Counting principle) ή Καρτεσιανό γινόμενο

Ένα πείραμα απαρτίζεται από r στάδια. Έστω ότι

- (α) Υπάρχουν n_1 δυνατά αποτελέσματα για το πρώτο στάδιο
- (β) Για κάθε πιθανό αποτέλεσμα του πρώτου σταδίου, υπάρχουν n_2 δυνατά αποτελέσματα στο δεύτερο στάδιο
- (γ) Γενικά, για κάθε πιθανό αποτέλεσμα των πρώτων $i - 1$ σταδίων, υπάρχουν n_i δυνατά αποτελέσματα στο στάδιο i .



Τότε, ο αριθμός όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος είναι $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$.

Διατάξεις (Μεταθέσεις) (Permutations)

Από ένα πλήθος n διαφορετικών αντικειμένων παίρνουμε k από αυτά και τα βάζουμε σε μια σειρά. Οι ακολουθίες k στοιχείων που προκύπτουν καλούνται διατάξεις των n στοιχείων ανά k και είναι

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

το πλήθος, όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$: "n παραγοντικό", $0! = 1$

Συνδυασμοί (Combinations)

Σε μια διάταξη λαμβάνεται υπόψη η σειρά των στοιχείων. Αν δε μας ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων, αλλά μόνο τα διαφορετικά σύνολα, λέμε ότι παίρνουμε τους συνδυασμούς n στοιχείων ανά k , $C(n, k)$.

Προφανώς, από κάθε συνδυασμό με k στοιχεία προκύπτουν $k!$ διατάξεις. Επομένως,

$$C(n, k) \cdot k! = P(n, k) \quad \therefore \quad C(n, k) = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!} \equiv \binom{n}{k}$$

το πλήθος συνδυασμών n στοιχείων ανά k .

Διαμερισμοί (Partitions)

Ένας συνδυασμός n στοιχείων ενός συνόλου ανά k διαμερίζει το σύνολο σε δύο υποσύνολα εκ των οποίων το ένα περιέχει k στοιχεία και το άλλο τα υπόλοιπα $n - k$.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να γενικεύσουμε διαμερίζοντας το αρχικό σύνολο σε περισσότερα των 2 υποσύνολα, συγκεκριμένα r τον αριθμό, ξένα μεταξύ τους που περιέχουν $n_1 + n_2 + \dots + n_r$ στοιχεία ώστε $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$.

Εφαρμόζοντας την αρχή της απαρίθμησης για αυτήν την διαδικασία r -σταδίων, ο συνολικός αριθμός διαμερισμών n στοιχείων σε $n_1, n_2, \dots, n_r$ είναι

$$P(n, n_1, \dots, n_r) \equiv \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

Συγκεντρωτικός πίνακας - Αντιστοιχία με δειγματοληψία

Δειγματοληψία	Στοιχείο Συνδυαστικής Ανάλυσης	Τύπος
Με επανάθεση	Καρτεσιανό γινόμενο	$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$
Χωρίς επανάθεση (Έχει σημασία η σειρά)	Διατάξεις/Μεταθέσεις	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Χωρίς επανάθεση, χωρίς διάταξη (Δεν έχει σημασία η σειρά)	Συνδυασμοί	$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$
Διαδοχική	Διαμερισμοί	$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$

Άσκηση 1.

Το δελτίο καιρού για μία τυχαία μέρα του έτους μπορεί να λέει 'ήλιος', 'συννεφιά', 'βροχή' ή 'χιόνι'. Υποθέτουμε τέσσερις εποχές (φθινόπωρο, χειμώνας, άνοιξη, καλοκαίρι) με 90 ημέρες στην κάθε εποχή, ότι χιόνι μπορεί να πέσει μόνο τον χειμώνα και ότι δε βρέχει το καλοκαίρι.

Πόσα ετήσια δελτία καιρού είναι δυνατά, δηλαδή ποιο είναι το πλήθος όλων των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού $(4 \cdot 90)$ 360 ημερών.

Λύση.

Την άνοιξη και το φθινόπωρο, κάθε μέρα έχει τρεις πιθανές καταστάσεις για τον καιρό ('ήλιος', 'συννεφιά', 'βροχή'), συνεπώς για κάθε μια από αυτές τις εποχές το συνολικό πλήθος των καταστάσεων είναι

$$\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3}_{90 \text{ μέρες}} = 3^{90}.$$

Ομοίως, υπάρχουν 4^{90} καταστάσεις για τον χειμώνα ('ήλιος', 'συννεφιά', 'βροχή', 'χιόνι') και 2^{90} καταστάσεις για το καλοκαίρι ('ήλιος', 'συννεφιά'). Το συνολικό πλήθος όλων των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού για 360 μέρες είναι:

$$3^{90} \times 3^{90} \times 4^{90} \times 2^{90} \approx 10^{167}.$$

Άσκηση 2.

Πόσους αναγραμματισμούς μπορούμε να κάνουμε στις παρακάτω λέξεις;

(α') children

(β') bookkeeper

Λύση.

Ο τύπος για τους ανασυνδυασμούς n αντικειμένων εκ των οποίων υπάρχουν k_1 αντικείμενα τύπου 1, k_2 αντικείμενα τύπου 2, $\dots$, k_m αντικείμενα τύπου m είναι:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots \cdot k_m!}. \quad (\text{Από θεωρία Διαμερισμών παραπάνω})$$

Με βάση αυτόν τον τύπο η λύση του προβλήματος είναι απλή:

(α') με την λέξη children μπορούμε να κάνουμε $\frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 8!$ αναγραμματισμούς (κανένα γράμμα δεν εμφανίζεται παραπάνω από 1 φορές).

(β') με την λέξη bookkeeper μπορούμε να κάνουμε $\frac{10!}{1! \cdot \underbrace{2!}_o \cdot \underbrace{2!}_k \cdot \underbrace{3!}_e \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$ αναγραμματισμούς.

Άσκηση 3.

Ένα άτομο έχει 8 φίλους, 5 από τους οποίους θέλει να καλέσει σε ένα πάρτι.

(α') Πόσες επιλογές έχει αν δύο από τους φίλους του έχουν μαλώσει και δεν γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως;

(β') Πόσες επιλογές έχει αν δύο από τους φίλους του είναι ζευγάρι και πρέπει να προσκληθούν συγχρόνως;

Λύση.

Tip: Σε τέτοιου είδους ασκήσεις αρχικά σκεφτόμαστε τις περιπτώσεις για να πραγματοποιηθεί το ζητούμενο ενδεχόμενο και στη συνέχεια χωρίζουμε το αρχικό σύνολο σε υποσύνολα στα οποία τέλος μετράμε το πλήθος των συνδυασμών.

(α') Εδώ έχουμε 2 περιπτώσεις αν δύο άτομα δε γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως: είτε δε θα προσκληθεί κανένας από τους δύο, είτε θα προσκληθεί μόνο ένας εκ των δύο.

Στη συνέχεια το σύνολο χωρίζεται σε δύο υποσύνολα: Το ένα περιέχει τα 2 άτομα που έχουν μαλώσει και το άλλο τα εναπομείναντα 6 από τα συνολικά 8 άτομα.

Στην πρώτη περίπτωση το άτομο δε θα καλέσει κανένα από τους δύο, διαλέγοντας 0 άτομα από το σύνολο των 2 και θα καλέσει και τα 5 άτομα από το σύνολο των 6. Στη δεύτερη περίπτωση το άτομο θα καλέσει έναν εκ των δύο, διαλέγοντας 1 άτομο από το σύνολο των 2 και θα καλέσει τα υπόλοιπα 4 άτομα από το σύνολο των 6.

Οπότε τελικά το συνολικό πλήθος των επιλογών θα είναι:

$$C(2, 0) \cdot C(6, 5) + C(2, 1) \cdot C(6, 4) = \binom{2}{0} \cdot \binom{6}{5} + \binom{2}{1} \cdot \binom{6}{4} = \binom{6}{5} + 2 \cdot \binom{6}{4}$$

(β') Εδώ έχουμε 2 περιπτώσεις αν δύο άτομα είναι ζευγάρι: είτε δε θα προσκληθεί κανένας από τους δύο, είτε θα προσκληθούν και οι δύο.

Στη συνέχεια το σύνολο χωρίζεται σε δύο υποσύνολα: Το ένα περιέχει τα 2 άτομα που είναι ζευγάρι και το άλλο τα εναπομείναντα 6 από τα συνολικά 8 άτομα.

Στην πρώτη περίπτωση το άτομο δε θα καλέσει κανένα από τους δύο, διαλέγοντας 0 άτομα από το σύνολο των 2 και θα καλέσει και τα 5 άτομα από το σύνολο των 6. Στη δεύτερη περίπτωση το άτομο θα καλέσει και τους δύο, διαλέγοντας και τα 2 άτομα από το σύνολο των 2 και θα καλέσει τα υπόλοιπα 3 άτομα από το σύνολο των 6.

Οπότε τελικά το συνολικό πλήθος των επιλογών θα είναι:

$$C(2, 0) \cdot C(6, 5) + C(2, 2) \cdot C(6, 3) = \binom{2}{0} \cdot \binom{6}{5} + \binom{2}{2} \cdot \binom{6}{3} = \binom{6}{5} + \binom{6}{3}$$

Άσκηση 4.

Μια τράπουλα που αποτελείται από 52 χαρτιά μοιράζεται σε τέσσερις παίκτες.

(α') Βρείτε την πιθανότητα ο *πρώτος* παίκτης να πάρει 13 σπαθιά.

(β') Βρείτε την πιθανότητα *κάποιος* παίκτης να πάρει 13 σπαθιά.

(γ') Θεωρήστε τα παρακάτω γεγονότα:

(i) Ο πρώτος παίκτης παίρνει και τα 13 σπαθιά.

(ii) Ο πρώτος παίκτης παίρνει τον Ρήγα κούπα.

Είναι τα γεγονότα αυτά ανεξάρτητα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(δ') Θεωρήστε τα παρακάτω γεγονότα:

(i) Τα φύλλα του πρώτου παίκτη έχουν όλα το ίδιο σχήμα.

(ii) Ο πρώτος παίκτης παίρνει τον Ρήγα κούπα.

Είναι τα γεγονότα αυτά ανεξάρτητα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση.

(α') Το πλήθος των πιθανών συνδυασμών/χεριών των 52 φύλλων ανά 13 που μοιράζονται στον πρώτο παίκτη είναι $\binom{52}{13}$. Μονάχα ένα από αυτά τα χέρια αποτελείται από 13 σπαθιά μόνο, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{1}{\binom{52}{13}}$$

(β') Ορίζουμε 4 γεγονότα:

$$A = \{\text{Ο παίκτης 1 παίρνει 13 σπαθιά}\}$$

$$B = \{\text{Ο παίκτης 2 παίρνει 13 σπαθιά}\}$$

$$\Gamma = \{\text{Ο παίκτης 3 παίρνει 13 σπαθιά}\}$$

$$\Delta = \{\text{Ο παίκτης 4 παίρνει 13 σπαθιά}\}$$

Τα τέσσερα γεγονότα, A, B, Γ, Δ είναι ξένα μεταξύ τους, αφού αν κάποιος πάρει όλα τα σπαθιά κανένας άλλος δε μπορεί να τα πάρει. Συνεπώς, μπορούμε να προσθέσουμε τις επιμέρους πιθανότητες για να πάρουμε τη ζητούμενη πιθανότητα, που είναι η ένωσή τους. Κάθε επιμέρους γεγονός έχει πιθανότητα $\frac{1}{\binom{52}{13}}$, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) + P(\Delta) = \frac{4}{\binom{52}{13}}$$

(γ') Θεωρούμε τα γεγονότα :

$$A = \{\text{Ο παίχτης 1 έχει 13 σπαθιά}\}$$

$$B = \{\text{Ο παίχτης 1 έχει το Ρήγα κούπα}\}$$

• **Α τρόπος**

Ξέρουμε από τη θεωρία μας ότι για 2 ανεξάρτητα γεγονότα A και B θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{και} \quad P(B/A) = P(B)$$

Εδώ, αν γνωρίζουμε ότι το γεγονός B ισχύει, τότε ξέρουμε ότι δεν μπορεί να έχει και τα 13 σπαθιά. Με άλλα λόγια $P(A|B) = 0$. Όμως έχουμε δείξει ότι $P(A) = \frac{1}{\binom{52}{13}}$, οπότε τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

• **Β τρόπος**

Ξέρουμε από τη θεωρία μας ότι για 2 ανεξάρτητα γεγονότα A και B θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι όταν δυο γεγονότα με μη μηδενική πιθανότητα είναι ξένα μεταξύ τους, τότε δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητα, διότι τότε

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$$

Εδώ, τα γεγονότα A και B είναι ξένα μεταξύ τους με μη μηδενικές πιθανότητες, άρα δε μπορεί να είναι ανεξάρτητα.

(δ') Θεωρούμε τα γεγονότα :

$$A = \{\text{Τα φύλλα του παίχτη 1 έχουν όλα το ίδιο σχήμα}\}$$

$$B = \{\text{Ο παίχτης 1 έχει το Ρήγα κούπα}\}$$

Θα δείξουμε ότι τα δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα δείχνοντας ότι $P(B|A) = P(B)$.

Γνωρίζουμε ότι $P(B|A) = 1/4$, αφού δεδομένου ότι τα φύλλα του παίχτη 1 έχουν όλα το ίδιο σχήμα, γνωρίζουμε ότι το σχήμα μπορεί να είναι ένα από τα τέσσερα, είτε κούπες, είτε καρό, είτε σπαθιά, είτε μπαστούνια. Κάθε σχήμα είναι ισοπίθανο με κάθε άλλο με πιθανότητα $1/4$. Παρατηρούμε επιπλέον για $P(B) = 1/4$, αφού κάθε ένας από τους 4 παίχτες μπορεί να πάρει τον Ρήγα κούπα με ίση πιθανότητα, άρα η πιθανότητα ο παίχτης 1 να πάρει τον Ρήγα κούπα είναι $1/4$.

Προσοχή: Η $P(B)$ θα ήταν $\frac{1}{52}$ αν είχα ένα παίχτη να τραβάει χαρτιά από την τράπουλα, όμως εδώ έχω 4 παίχτες στους οποίους μοιράζονται τα φύλλα οπότε είναι στη ουσία :

$$\frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52}} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{4}{52}} = \frac{1}{4}.$$

Εφόσον $P(B|A) = P(B)$, τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα.

Επιπλέον παρατηρήστε ότι τα δυο αυτά γεγονότα δεν είναι ξένα μεταξύ τους, καθώς η τομή τους δεν είναι κενή - και αυτή είναι το γεγονός ο παίχτης 1 να πάρει όλες τις κούπες.

Άσκηση 5.

Τραβάμε 7 χαρτιά από μία καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Βρείτε την πιθανότητα ότι :

- (α') Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους.
 (β') Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες.
 (γ') Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους ή 2 βαλέδες.

Λύση.

- (α') Ορίζουμε το γεγονός

$$A = \{\text{Τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους}\}$$

Συνολικά υπάρχουν $\binom{52}{7}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 7 φύλλα από μια τράπουλα των 52 φύλλων.

Ας μετρήσουμε πόσοι από τους συνδυασμούς αυτούς περιέχουν ακριβώς 3 άσσους :

Ακολουθούμε και πάλι το σκεπτικό ότι "σπάμε" το αρχικό σύνολο σε υποσύνολα και μετράμε τους συνδυασμούς μέσα σε αυτά. Συγκεκριμένα, εδώ έχουμε ένα υποσύνολο που περιέχει τους 4 άσσους και άλλο ένα που περιέχει τα υπόλοιπα 48, τα οποία δεν είναι άσσοι εκ των συνολικά 52 χαρτιών.

Υπάρχουν λοιπόν $\binom{4}{3}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 3 από τους 4 άσσους και $\binom{48}{4}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε τα υπόλοιπα 4 φύλλα από τα 48 φύλλα της τράπουλας που έχουν απομείνει. Συνεπώς, υπάρχουν $\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{4}$ δυνατοί συνδυασμοί να τραβήξουμε 7 φύλλα που να περιέχουν ακριβώς 3 άσσους.

Για να βρούμε τη πιθανότητα ότι στα 7 φύλλα περιέχονται 3 άσσοι, διαιρούμε αυτό τον αριθμό με το συνολικό πλήθος των δυνατών συνδυασμών να διαλέξουμε 7 φύλλα από μια τράπουλα των 52 φύλλων

$$\frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{4}}{\binom{52}{7}}$$

- (β') Με ανάλογο συλλογισμό όπως παραπάνω, υπάρχουν $\binom{4}{2}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 2 από τους 4 βαλέδες και $\binom{48}{5}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε τα υπόλοιπα 5 φύλλα από τα 48 φύλλα της τράπουλας που έχουν απομείνει.

Συνεπώς, υπάρχουν $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5}$ δυνατοί συνδυασμοί να τραβήξουμε 7 φύλλα που να περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες.

Η πιθανότητα στα 7 φύλλα να περιέχονται 2 βαλέδες είναι

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5}}{\binom{52}{7}}$$

- (γ') Έστω

$$A = \{\text{Τραβήξαμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 3 άσσους}\}$$

$$B = \{\text{Τραβήξαμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες}\}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ είναι γνωστές, από τα προηγούμενα ερωτήματα, άρα πρέπει να βρούμε την πιθανότητα $P(A \cap B)$. Το γεγονός $A \cap B$ συμβαίνει με την επιλογή 3 από τους 4 άσσους, 2 από τους 4 βαλέδες και 2 από τα υπόλοιπα 44 χαρτιά. Συνολικά λοιπόν, υπάρχουν $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{2}$ δυνατοί τρόποι για να επιλέξουμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 3 άσσους και 2 βαλέδες.

Άρα :

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{3} \binom{4}{2} \binom{44}{2}}{\binom{52}{7}}$$

και

$$P(A \cup B) = \frac{\binom{4}{3} \binom{48}{4} + \binom{4}{2} \binom{48}{5} - \binom{4}{3} \binom{4}{2} \binom{44}{2}}{\binom{52}{7}}.$$

Άσκηση 6.

Το κατάστημα της γειτονιάς σας πραγματοποιεί εκκαθάριση. Τα πάντα πρέπει να πωληθούν, νέα και παλιά! Το κατάστημα έχει 1000 παλιά κομμάτια και 1500 καινούρια. Το πρόβλημα είναι ότι 15% των παλιών είναι ελαττωματικά καθώς και 5% των νέων.

(α') Ρίχνετε ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσετε αν θα αγοράσετε παλιό ή νέο προϊόν. Διαλέγετε δύο κομμάτια του ίδιου τύπου (νέα ή παλιά) ανάλογα με το αποτέλεσμα μίας και μοναδικής ρίψης του κέρματος.

Ποια η πιθανότητα ότι και τα δύο θα είναι ελαττωματικά;

(β') Δεδομένων των συνθηκών στο **(α)**, και του ότι και τα δύο αντικείμενα είναι ελαττωματικά, ποια η πιθανότητα ότι και τα δύο είναι παλιά;

Λύση.

(α') Έστω

$$A = \{\text{Τα επιλεγμένα κομμάτια είναι ελαττωματικά}\}$$

$$B_1 = \{\text{Επιλέγονται 2 παλιά κομμάτια}\}$$

$$B_2 = \{\text{επιλέγονται 2 νέα κομμάτια}\}$$

Τα γεγονότα B_1 και B_2 είναι ξένα και αποτελούν μια διαμέριση του Ω το καθένα με θετική πιθανότητα. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα, σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, θα ισούται με

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2) \quad (1)$$

Τα κομμάτια έχουν ίση πιθανότητα να είναι καινούρια ή παλιά, λόγω της επιλογής μέσω ρίψης δίκαιου κέρματος, άρα $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$.

Υπάρχουν $\binom{1000}{2}$ τρόποι, με ίση πιθανότητα, επιλογής δύο παλιών κομματιών από ένα σύνολο από 1000 παλιά κομμάτια. Εφόσον 15% των παλιών κομματιών είναι ελαττωματικά, υπάρχουν 150 ελαττωματικά παλιά κομμάτια.

Υπάρχουν $\binom{150}{2}$ τρόποι επιλογής 2 ελαττωματικών παλιών κομματιών από ένα σύνολο από 150 ελαττωματικά παλιά κομμάτια. Επομένως, θα έχουμε

$$P(A | B_1) = \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}$$

Παρομοίως, ένα 5% από τα νέα κομμάτια (75) είναι ελαττωματικά.

Δεδομένου ότι 2 νέα κομμάτια επιλέγονται, θα έχουμε:

$$P(A | B_2) = \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}$$

Άρα, τελικά

$$(1) \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}$$

(β') Ψάχνουμε για την πιθανότητα $P(B_1 \mid A)$. Σε αντιστοιχία με τη θεωρία, η παρατήρηση/αποτέλεσμα είναι ότι τα αντικείμενα είναι ελαττωματικά και η αιτία για την οποία ψάχνουμε κατά πόσον συμβάλλει στο αποτέλεσμα είναι η παλαιότητα των κομματιών. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, τον κανόνα του Bayes θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 P(B_1 \mid A) &= \frac{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1)}{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}}
 \end{aligned}$$