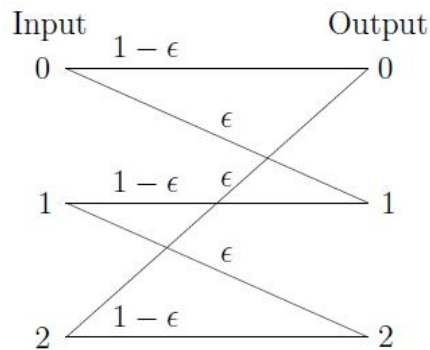


ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 3
Επιμέλεια: Κατερίνα Καραγιαννάκη

Άσκηση 1.

Το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης για ένα τριαδικό κανάλι επικοινωνίας φαίνεται στο Σχήμα 1. Υποθέστε ότι τα σύμβολα 0, 1 και 2 στέλνονται με πιθανότητες $1/2$, $1/4$ και $1/4$ αντίστοιχα.



Σχήμα 1: Διάγραμμα πιθανοτήτων μεταβάσεων

(α) Βρείτε τις πιθανότητες λήψης συμβόλων.

(β) Δεδομένου ότι λαμβάνεται 1, βρείτε τις πιθανότητες να εστάλη 0, 1 ή 2. Να απαντήσετε συναρτήσει του όρου ϵ (πιθανότητα λάθους).

Λύση.

(α) Έστω A_i το γεγονός ότι εστάλη i και B_i το γεγονός ότι ελήφθη i . Χρησιμοποιώντας τον νόμο της ολικής πιθανότητας και της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(B_0|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_2)P(A_2) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \epsilon) + \frac{1}{4}\epsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(B_1|A_0)P(A_0) + P(B_1|A_1)P(A_1) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{4}(1 - \epsilon) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|A_2)P(A_2) \\ &= \frac{1}{4}\epsilon + \frac{1}{4}(1 - \epsilon) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο το άθροισμα των πιθανοτήτων των γεγονότων B_i είναι 1.

(β)

$$\begin{aligned}
 P(A_0|B_1) &= \frac{P(A_0, B_1)}{P(B_1)} \\
 &= \frac{P(B_1, A_0)}{P(B_1)} \\
 &= \frac{P(B_1|A_0)P(A_0)}{P(B_1)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\epsilon}{\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{4}(1-\epsilon)} \\
 &= \frac{2\epsilon}{1+\epsilon}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(A_1|B_1) &= \frac{P(A_1, B_1)}{P(B_1)} \\
 &= \frac{P(B_1, A_1)}{P(B_1)} \\
 &= \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}(1-\epsilon)}{\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{4}(1-\epsilon)} \\
 &= \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}
 \end{aligned}$$

$$P(A_2|B_1) = 0$$

Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι το άθροισμα των δεσμευμένων πιθανοτήτων είναι 1.

Άσκηση 2. Μία μαγνητική ταινία η οποία περιέχει πληροφορία σε ψηφιακή μορφή έχει αλλοιωθεί. Προσπαθείτε να ανακτήσετε όσο το δυνατόν περισσότερα bits πληροφορίας. Προφανώς γνωρίζετε ότι αυτό που διαβάζετε πιθανώς είναι λάθος. Γνωρίζετε ότι αν υπήρχε ένα 0, η πιθανότητα να το διαβάσετε σωστά είναι 0.9. Επίσης, η πιθανότητα σωστής ανάγνωσης ενός 1 είναι 0.85. Κάθε bit στην ταινία είναι 0 ή 1 με την ίδια πιθανότητα. Δεδομένου ότι διαβάζετε 1 για κάποιο bit, ποια η πιθανότητα ότι το έχετε διαβάσει σωστά;

Λύση.

Έστω A_0 το ενδεχόμενο ότι διαβάζω το bit 0, έστω A_1 το ενδεχόμενο ότι διαβάζω το bit 1, έστω B_0 το ενδεχόμενο ότι το bit που διαβάζω είναι πράγματι 0 και έστω B_1 το ενδεχόμενο ότι το bit που διαβάζω είναι πράγματι 1. Οπότε, ισχύουν οι εξής πιθανότητες: $P(A_0|B_0) = 0.9$, $P(A_1|B_1) = 0.85$, $P(A_1|B_0) = 1 - P(A_0|B_0) = 1 - 0.9 = 0.1$, $P(B_0) = P(B_1) = 1/2$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(B_1|A_1)$. Από τον κανόνα του Bayes θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
 P(B_1|A_1) &= \frac{P(B_1)P(A_1|B_1)}{P(B_1)P(A_1|B_1) + P(B_0)P(A_1|B_0)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}0.85}{\frac{1}{2}0.85 + \frac{1}{2}0.1} \\
 &\cong 0.895
 \end{aligned}$$

Άσκηση 3. Σε μία γραπτή εξέταση επιλογής ορθών απαντήσεων (multiple-choice test), ο φοιτητής είτε γνωρίζει την απάντηση είτε μαντεύει. Έστω p η πιθανότητα ότι ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση και $1 - p$ η πιθανότητα ότι ο φοιτητής μαντεύει. Υποθέτουμε ότι όταν ο φοιτητής μαντεύει, επιλέγει τη σωστή απάντηση με πιθανότητα $1/m$, όπου m είναι ο αριθμός των επιλογών για κάθε ερώτηση. Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα ότι ο φοιτητής γνώριζε την απάντηση σε μία ερώτηση, δεδομένου ότι απάντησε σωστά; Υπολογίστε την πιθανότητα όταν $m = 5$ και $p = 1/2$.

Λύση. Έστω C το γεγονός ότι ο μαθητής απαντάει την ερώτηση σωστά και K το γεγονός ότι ο μαθητής πράγματι ξέρει την απάντηση. Τώρα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(K|C) &= \frac{P(C|K) P(K)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C|K) P(K)}{P(C|K) P(K) + P(C|K^c) P(K^c)} \\ &= \frac{p}{p + (1/m)(1 - p)} \\ &= \frac{mp}{1 + (m - 1)p} \end{aligned}$$

Η παραπάνω πιθανότητα για $m = 5$ και $p = 1/2$ θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P(K|C) &= \frac{mp}{1 + (m - 1)p} \\ &= \frac{5 \cdot 1/2}{1 + (5 - 1) \cdot 1/2} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Στην κουζίνα του σπιτιού σας, βάζετε τα 12 πιρούνια σας στο αριστερό συρτάρι ενώ τοποθετείτε τα 12 μαχαίρια σας στο δεξί. Ο συγκάτοικός σας (που δεν συμφωνεί με την απόλυτη τάξη που προσπαθείτε να του επιβάλλετε), παίρνει τρία πιρούνια από το αριστερό συρτάρι και τα ρίχνει στο δεξί. Κατόπιν, παίρνει στην τύχη ένα κομμάτι (πιρούνι ή μαχαίρι) από το δεξί συρτάρι και το ρίχνει στο αριστερό.

Μετά από αυτή την πράξη εξέγερσης του συγκάτοικου σας, έρχεστε και επιλέγετε στην τύχη ένα κομμάτι από ένα τυχαίο συρτάρι. Δεδομένου ότι κρατάτε στο χέρι σας ένα μαχαίρι, ποια η πιθανότητα ότι ανοίξατε το αριστερό συρτάρι;

Υπόδειξη: Αρχικά κωδικοποιείτε τις καταστάσεις στα δύο συρτάρια ως εξής. Για το αριστερό: $(12F, 0K)$, ενώ για το δεξί: $(0F, 12K)$. Από αυτή την αρχική διάταξη (ρίζα του δένδρου), σχηματίστε το δένδρο για το πρόβλημα. Αφού το κάνετε, η λύση βασίζεται σε απλές εφαρμογές του θεωρήματος ολικής πιθανότητας και του κανόνα του Bayes.

Λύση

Αρχικά 12 πιρούνια και κανένα μαχαίρι βρίσκονται στο αριστερό συρτάρι, το οποίο κωδικοποιείται ως $(12F, 0K)$. Ομοίως, για το δεξί συρτάρι έχουμε $(0F, 12K)$. Αφού ο συγκάτοικός σας πάρει 3 πιρούνια από το αριστερό συρτάρι και τα τοποθετήσει στο δεξί, η κατάσταση του αριστερού συρταριού είναι $(9F, 0K)$, ενώ για το δεξί $(3F, 12K)$. Για το δεξί συρτάρι η πιθανότητα να επιλέξει ένα πιρούνι είναι ίση με $3/15 = 1/5$ και η πιθανότητα να επιλέξει ένα μαχαίρι ίση με $12/15 = 4/5$.

Από αυτή την κατάσταση, το σύστημα μπορεί να εξελιχθεί σε δύο δυνατούς τρόπους (βλέπε σχήμα 2). Θα ονομάσουμε τις καταστάσεις αυτές C_1 και C_2 . Η κατάσταση C_1 αναφέρεται στο γεγονός ότι ένα πιρούνι μεταφέρθηκε από το δεξί συρτάρι στο αριστερό, αφήνοντας τα συρτάρια στις εξής καταστάσεις $(10F, 0K)$ και $(2F, 12K)$, ενώ η κατάσταση C_2 αναφέρεται στο γεγονός ότι ένα μαχαίρι μεταφέρθηκε από το δεξί συρτάρι στο αριστερό, αφήνοντας τα συρτάρια στις εξής καταστάσεις $(9F, 1K)$ και $(3F, 11K)$. Συνεπώς $P(C_1) = 1/5$ και $P(C_2) = 4/5$. Από τον κανόνα του Bayes έχουμε:

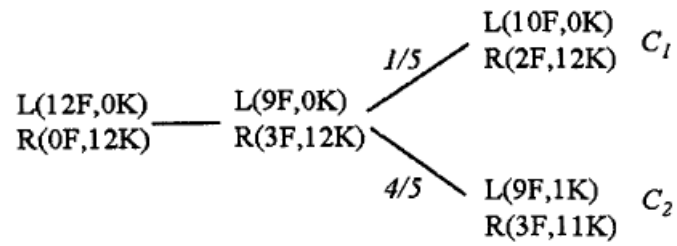
$$\begin{aligned} P(\text{αριστερό συρτάρι} | \text{μαχαίρι επιλέχθηκε}) &= \frac{P(\text{μαχαίρι επιλέχθηκε} | \text{αριστερό συρτάρι}) P(\text{αριστερό συρτάρι})}{P(\text{μαχαίρι επιλέχθηκε})} \\ &= \frac{P(\text{μαχαίρι επιλ.} | \text{αριστερό συρτ.}) P(\text{αριστερό συρτ.})}{P(\text{μαχαίρι επιλ.} | \text{αριστερό συρτ.}) P(\text{αριστερό συρτ.}) + P(\text{μαχαίρι επιλ.} | \text{δεξί συρτ.}) P(\text{δεξί συρτ.})} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(\text{μαχαίρι} | \text{αριστερό συρτάρι}) &= P(\text{μαχαίρι} | C_1, \text{αριστερό συρτάρι}) P(C_1) \\ &\quad + P(\text{μαχαίρι} | C_2, \text{αριστερό συρτάρι}) P(C_2) \\ &= 0 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{2}{25} \end{aligned}$$

Ομοίως:

$$\begin{aligned} P(\text{μαχαίρι} | \text{δεξί συρτάρι}) &= P(\text{μαχαίρι} | C_1, \text{δεξί συρτάρι}) P(C_1) \\ &\quad + P(\text{μαχαίρι} | C_2, \text{δεξί συρτάρι}) P(C_2) \\ &= \frac{12}{14} \times \frac{1}{5} + \frac{11}{14} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$



Σχήμα 2: Το δένδρικό διάγραμμα της άσκησης 4.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα Bayes έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(\text{αριστερό συρτάρι}|\text{μαχαίρι}) &= \frac{P(\text{μαχαίρι επιλέχθηκε}|\text{αριστερό αυρτάρι})P(\text{αριστερό συρτάρι})}{P(\text{μαχαίρι επιλέχθηκε})} \\
 &= \frac{2/25 \times 1/2}{2/25 \times 1/2 + 4/5 \times 1/2} \\
 &= \frac{1}{11}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Πριν φύγει για τη δουλειά του ο Νίκος ελέγχει το δελτίο καιρού στην τηλεόραση για να αποφασίσει αν θα πάρει μαζί του ομπρέλα ή όχι. Όταν το δελτίο λέει ότι θα βρέξει, η πιθανότητα όντως να βρέξει είναι 80%. Από την άλλη, όταν το δελτίο λέει ότι δεν θα βρέξει, η πιθανότητα να βρέξει είναι 10%. Κατά τη διάρκεια του χειμώνα το δελτίο λέει "βροχή" 7 στις 10 μέρες, ενώ κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού, το δελτίο λέει "βροχή" 2 στις 10 μέρες.

(α) Μία μέρα που ο Νίκος δεν κοιτάξε το δελτίο, έβρεξε. Ποια είναι η πιθανότητα ότι το δελτίο είπε "βροχή" αν ήταν μία μέρα του χειμώνα; Ποια είναι η πιθανότητα ότι το δελτίο είπε "βροχή" αν ήταν μία μέρα του καλοκαιριού;

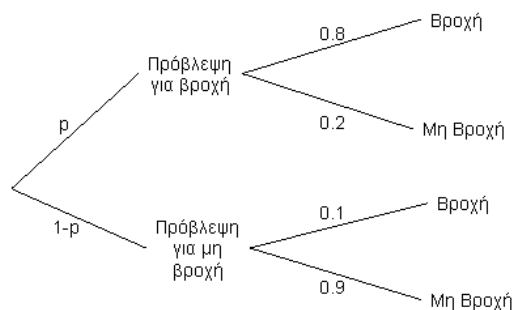
(β) Η πιθανότητα να μην κοιτάξει το δελτίο ο Νίκος είναι 0.2 για οποιαδήποτε ημέρα του χρόνου. Όταν χάνει το δελτίο, ο Νίκος ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσει αν θα πάρει ομπρέλα μαζί του. Τις μέρες που βλέπει το δελτίο, παίρνει πάντα μαζί του την ομπρέλα αν το δελτίο πει "βροχή", και δεν την παίρνει ποτέ αν το δελτίο πει "οχι βροχή". Είναι τα γεγονότα "ο Νίκος παίρνει την ομπρέλα" και "το δελτίο λέει όχι βροχή" ανεξάρτητα μεταξύ τους; Εξαρτάται η απάντηση από την εποχή;

(γ) Ο Νίκος κρατά την ομπρέλα του και δεν βρέχει. Δεδομένου ότι ισχύουν οι συνθήκες στο (β), ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Νίκος είδε το δελτίο;

Βοήθεια: Χρησιμοποιείστε δένδρα, δεσμευμένες πιθανότητες και τον κανόνα του Bayes.

Λύση.

(α) Η δενδρική αναπαράσταση φαίνεται στο σχήμα 3. Έστω A το γεγονός ότι υπήρξε Πρόβλεψη



Σχήμα 3: Δενδρική αναπαράσταση ζητήματος (α)

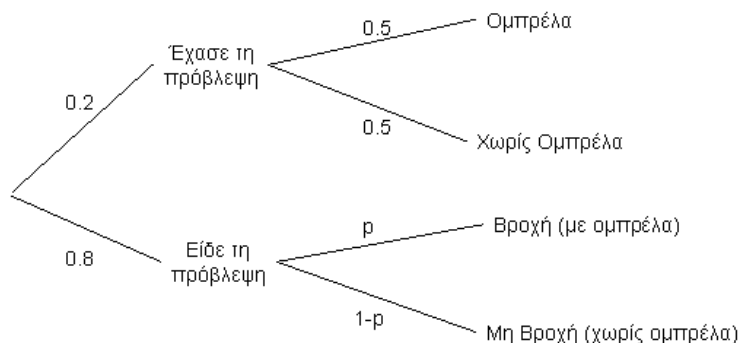
για βροχή. Έστω B το γεγονός ότι έβρεξε. Έστω p η πιθανότητα ότι η πρόβλεψη είναι για βροχή. Αν έχουμε χειμώνα, τότε είναι $p = 0.7$, οπότε θα έχουμε ότι:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B | A) \cdot p}{P(B)} = \frac{0.8 \cdot p}{0.8 \cdot p + 0.1 \cdot (1 - p)} = \frac{0.8 \cdot 0.7}{0.8 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.3} = \frac{56}{59}$$

Αν έχουμε καλοκαίρι, τότε είναι $p = 0.2$, οπότε θα έχουμε ότι:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B | A) \cdot p}{P(B)} = \frac{0.8 \cdot p}{0.8 \cdot p + 0.1 \cdot (1 - p)} = \frac{0.8 \cdot 0.2}{0.8 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8} = \frac{2}{3}$$

- (β) Έστω C το γεγονός ότι ο Νίκος κρατάει ομπρέλα και D το γεγονός ότι υπάρχει Πρόβλεψη για μη βροχή. Το δενδρικό διάγραμμα σε αυτή την περίπτωση φαίνεται στο σχήμα 4. Έχουμε



Σχήμα 4: Δενδρική αναπαράσταση ζητήματος (β)

ότι:

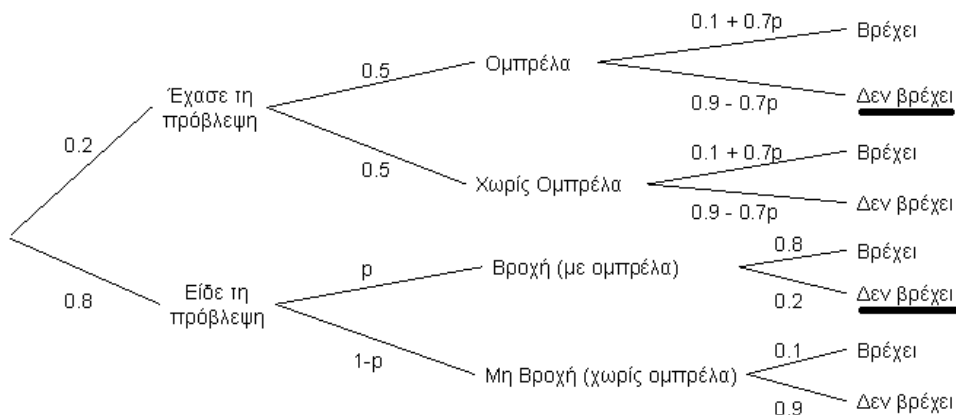
$$\begin{aligned} P(D) &= 1 - p \\ P(C) &= 0.8 \cdot p + 0.2 \cdot 0.5 = 0.8 \cdot p + 0.1 \\ P(C | D) &= 0.8 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.1 \end{aligned}$$

Επομένως, θα ισχύει $P(C) = P(C | D)$ αν και μόνο αν $p = 0$. Όμως, το p μπορεί να είναι είτε 0.7 είτε 0.2. Συνεπώς, τα γεγονότα C και D δεν θα είναι ποτέ ανεξάρτητα, όποια και αν είναι η εποχή.

(γ) Η πιθανότητα να βρέχει αν ο Νίκος έχασε τη πρόβλεψη θα ισούται με:

$$P(\text{βρέχει} \mid \text{έχασε τη πρόβλεψη}) = 0.8 \cdot p + 0.1 \cdot (1 - p) = 0.8 \cdot p + 0.1 - 0.1 \cdot p = 0.1 + 0.7 \cdot p$$

Επεκτείνουμε το δενδρικό διάγραμμα της εικόνας 2 (που αντιστοιχεί στο (β) μέρος της άσκησης) στο δενδρικό διάγραμμα του σχήματος 5. Επομένως, δεδομένου ότι ο Νίκος



Σχήμα 5: Δενδρική αναπαράσταση ζητήματος (γ)

κρατάει ομπρέλα και ότι δεν βρέχει, εξετάζουμε τις 2 υπογραμμισμένες περιπτώσεις της εικόνας 3 και έχουμε:

$$P = P(\text{είδε πρόβλεψη} \mid \text{ομπρέλα} \cap \text{δεν βρέχει}) = \frac{P(\text{είδε πρόβλεψη})P(\text{ομπρέλα} \cap \text{δεν βρέχει})}{P(\text{ομπρέλα} \cap \text{δεν βρέχει})} = \frac{0.8 \cdot p \cdot 0.2}{0.8 \cdot p \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot (0.9 - 0.7 \cdot p)}$$

Αν έχουμε φθινόπωρο ή χειμώνα, είναι $p = 0.7$, οπότε θα έχουμε

$$P = \frac{112}{153}$$

Αν έχουμε άνοιξη ή καλοκαίρι, είναι $p = 0.2$, οπότε θα έχουμε

$$P = \frac{8}{27}$$

Άσκηση 6. Έστω A , B και C τρία ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Δείξτε ότι τα ενδεχόμενα A και $B \cup C$ είναι επίσης ανεξάρτητα.

Λύση.

Θα δείξουμε ότι $P(A \cap (B \cup C)) = P(A)P(B \cup C)$, το οποίο συνεπάγεται την ανεξαρτησία των A και $B \cup C$.

Αρχικά σημειώστε ότι $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= P(A)(P(B) + P(C) - P(B)P(C)) \\ &= P(A)(P(B) + P(C) - P(B \cap C)) \\ &= P(A)P(B \cup C) \end{aligned}$$