

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 2
Επιμέλεια: Κατερίνα Καραγιαννάκη

Άσκηση 1. Μία κότα θέλει να διασχίσει το δρόμο αλλά φοβάται ότι θα την πατήσουν τα αυτοκίνητα. Ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσει. Αν φέρει γράμματα, δεν διασχίζει το δρόμο. Αν φέρει κεφαλή, επειδή είναι πολύ φοβισμένη, αποφασίζει να ρίξει το κέρμα άλλες 2 φορές. Αν οι επόμενες 2 ρίψεις φέρουν και οι δύο κεφαλή, τότε θα διασχίσει το δρόμο. Αν όχι, θα μείνει ακίνητη στην άκρη του δρόμου.

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η κότα δε θα διασχίσει τον δρόμο.
- (β) Με δεδομένο ότι η κότα δεν διασχίζει τον δρόμο, υπολογίστε την πιθανότητα ότι η πρώτη ρίψη του κέρματος έφερε γράμματα.
- (γ) Με δεδομένο ότι η κότα δεν διασχίζει τον δρόμο, υπολογίστε την πιθανότητα ότι η πρώτη ρίψη του κέρματος έφερε κεφαλή.

Λύση.

- (α) Για $i = 1, 2, 3$ ορίζουμε τα γεγονότα
 $H_i = \{\text{η } i\text{-στή ρίψη φέρνει κεφαλή}\}$
 $T_i = \{\text{η } i\text{-στή ρίψη φέρνει γράμματα}\}$
 $D = \{\text{Η κότα δε διασχίζει τον δρόμο}\}$
Τότε,

$$P(D) = P((H_1 H_2 H_3)^c) = 1 - P(H_1 H_2 H_3) = 1 - P(H_1)P(H_2)P(H_3)$$

διότι οι 3 ρίψεις του νομίσματος είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.
Άρα,

$$P(D) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

- (β) $P(T_1 | D) = \frac{P(T_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(T_1)}{P(D)}$ διότι $T_1 \subset D$
Άρα,

$$P(T_1 | D) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

- (γ) $P(H_1 | D) = 1 - P(H_1^c | D) = 1 - P(T_1 | D)$ διότι $H_1^c = T_1$
Άρα,

$$P(H_1 | D) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

Άσκηση 2. Ένα κουτί περιέχει 15 κόκκινες και 5 άσπρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία δύο μπάλες χωρίς επανάθεση.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι και οι δύο μπάλες είναι άσπρες;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη είναι άσπρη;

Βοήθεια: Χρησιμοποιείστε τον πολλαπλασιαστικό νόμο.

Λύση. Το κουτί περιέχει 15 κόκκινες μπάλες και 5 άσπρες μπάλες (συνολικά 20 μπάλες).

- (α) Έστω $P(A_1)$ η πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι άσπρη. Τότε θα ισχύει ότι:

$$P(A_1) = \frac{5}{20}$$

Δεδομένου ότι η πρώτη μπάλα είναι άσπρη, τώρα θα υπάρχουν 19 μπάλες στο κουτί, από τις οποίες οι 4 μόνο θα είναι άσπρες. Η πιθανότητα ότι και η δεύτερη μπάλα που επιλέγεται τυχαία είναι άσπρη είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2 | A_1) = \frac{4}{19}$$

Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό νόμο, η πιθανότητα ότι και οι δύο μπάλες που επιλέγονται τυχαία είναι άσπρες θα είναι ίση με:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

- (β) Έστω $P(K_1)$ η πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη. Τότε θα ισχύει ότι:

$$P(K_1) = \frac{15}{20}$$

Δεδομένου ότι η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη, τώρα θα υπάρχουν 19 μπάλες στο κουτί, από τις οποίες οι 5 θα είναι άσπρες. Η πιθανότητα ότι η δεύτερη μπάλα που επιλέγεται τυχαία είναι άσπρη είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2 | K_1) = \frac{5}{19}$$

Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό νόμο, η πιθανότητα ότι η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη άσπρη θα είναι ίση με:

$$P(K_1 \cap A_2) = P(A_2 | K_1) \cdot P(K_1) = \frac{5}{19} \cdot \frac{15}{20} = \frac{15}{76}$$

Άσκηση 3. Μας δίνονται 2 “πειραγμένα” νομίσματα εκ των οποίων το ένα φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $1/3$ και το άλλο φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $2/3$. Τα δύο νομίσματα φαίνονται να είναι πανομοιότυπα: δεν μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε εξ όψεως. Ρίχνουμε τα δύο νομίσματα *από μία φορά* το καθένα διαλέγοντας στην τύχη (με πιθανότητα $1/2$) ποιο θα ρίξουμε πρώτο. Ορίζουμε τα γεγονότα $H_i = \{\text{η } i\text{-στή ρίψη φέρνει κεφαλή}\}$, $i = 1, 2$.

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(H_1)$ και $P(H_2)$.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι και οι δύο ρίψεις φέρνουν κεφαλή, δηλαδή $P(H_1 \cap H_2)$.

(γ) Είναι τα γεγονότα H_1 και H_2 ανεξάρτητα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση.

(α) Ορίζουμε το γεγονός $A = \{\text{το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής } 1/3 \text{ ρίχνεται πρώτο}\}$. Προφανώς, $A^c = \{\text{το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής } 2/3 \text{ ρίχνεται πρώτο}\}$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαμέριση του δειγματοχώρου, εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(H_1) = P(A)P(H_1|A) + P(A^c)P(H_1|A^c) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Ομοίως:

$$P(H_2) = P(A)P(H_2|A) + P(A^c)P(H_2|A^c) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

(β) Ομοίως, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(H_1 \cap H_2) &= P(A)P(H_1 \cap H_2|A) + P(A^c)P(H_1 \cap H_2|A^c) \\ &= P(A)P(H_1|A)P(H_2|A) + P(A^c)P(H_1|A^c)P(H_2|A^c) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{3} = \frac{2}{9}. \end{aligned} \tag{1}$$

(γ) Από τα (α) και (β) έχουμε ότι $P(H_1 \cap H_2) = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{2} \frac{1}{2} = P(H_1)P(H_2)$. Συνεπώς, τα γεγονότα H_1 και H_2 *δεν είναι ανεξάρτητα*, αν και είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του A .

Άσκηση 4. Μία ασφαλιστική εταιρία κατατάσσει τους ανθρώπους σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την επικινδυνότητα τους στην οδήγηση: Κατηγορία μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου. Τα αρχεία της εταιρίας δείχνουν ότι οι πιθανότητες πελάτες μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου να έχουν ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι 0.05, 0.15 και 0.30, αντίστοιχα. Αν το 20% του πληθυσμού αποτελείται από άτομα μικρού ρίσκου, το 50% αποτελείται από άτομα μέτριου ρίσκου και το υπόλοιπο 30% αποτελείται από άτομα μεγάλου ρίσκου, ποιο ποσοστό του πληθυσμού έχει ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους; Αν κάποιος ασφαλισμένος δεν είχε κανένα ατύχημα το 2012, ποια η πιθανότητα ότι είναι άτομο

(α) μικρού ρίσκου;

(β) μέτριου ρίσκου;

Λύση.

Έστω G το γεγονός κάποιος να είναι καλός οδηγός, M να είναι μέτριος και B κακός. Αν A το γεγονός κάποιος να είχε ατύχημα, τότε

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|G)P(G) + P(A|M)P(M) + P(A|B)P(B) \\ &= (0.05) * (0.2) + (0.15)(0.5) + (0.3)(0.3) = 0.175 \end{aligned}$$

(α)

$$P(G|A^c) = \frac{P(A^c|G)P(G)}{P(A^c)} = \frac{0.95 * 0.2}{0.825} = 0.23.$$

(β)

$$P(M|A^c) = \frac{P(A^c|M)P(M)}{P(A^c)} = \frac{0.85 * 0.5}{0.825} = 0.51.$$

Άσκηση 5.

Η Άννα ανήκει σε μια λέσχη αναγνωστών που συναντιούνται μια φορά το μήνα για να συζητήσουν για κάποιο βιβλίο που μπορεί να είναι μυθιστόρημα ή βιογραφία. Η λέσχη επιλέγει τυχαία ένα βιβλίο, με τα μυθιστορήματα να έχουν 5 φορές μεγαλύτερη πιθανότητα επιλογής από ότι οι βιογραφίες. Η Άννα συμμετέχει στη μηνιαία συνάντηση της λέσχης με πιθανότητα $1/5$ αν το επιλεγμένο βιβλίο είναι μυθιστόρημα και με πιθανότητα $3/5$ αν το βιβλίο είναι βιογραφία.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Άννα συμμετέχει στη μηνιαία συνάντηση της λέσχης;
- (β) Με δεδομένο ότι η Άννα συμμετείχε στη μηνιαία συνάντηση, ποια είναι η πιθανότητα ότι το βιβλίο που επιλέχθηκε είναι βιογραφία;

Λύση.

Ορίζουμε τα γεγονότα

$$M = \{ \text{Η λέσχη επιλέγει τυχαία ένα μυθιστόρημα} \}$$

$$B = \{ \text{Η λέσχη επιλέγει τυχαία μία βιογραφία} \}$$

$$A = \{ \text{Η Άννα συμμετέχει στη μηνιαία συνάντηση της λέσχης} \}$$

Από τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε ότι

$$P(M) = 5P(B)$$

και αφού ο δειγματοχώρος μας διαμερίζεται στα γεγονότα M και B :

$$P(\Omega) = P(M) + P(B) = 5P(B) + P(B) = 6P(B) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(P(B) = 1/6 \text{ και } P(M) = 5/6)$$

$$\text{Ακόμα, } P(A | M) = 1/5 \text{ και } P(A | B) = 3/5$$

- (α) Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας η πιθανότητα η Άννα να συμμετέχει στη μηνιαία συνάντηση της λέσχης είναι

$$P(A) = P(M)P(A | M) + P(B)P(A | B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{15}$$

- (β) Από το νόμο του Bayes η πιθανότητα ότι το βιβλίο που επιλέχθηκε είναι βιογραφία (αίτιο) με δεδομένο ότι η Άννα συμμετείχε στη μηνιαία συνάντηση της λέσχης (αποτέλεσμα/παρατήρηση) είναι

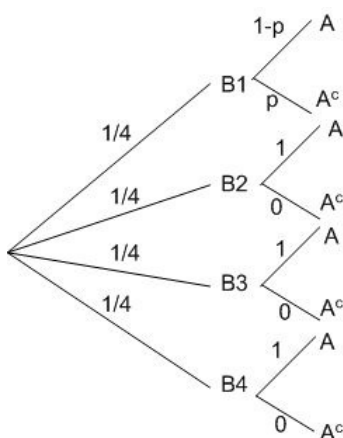
$$P(B | A) = \frac{P(B)P(A | B)}{P(B)P(A | B) + P(M)P(A | M)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{8}{30}} = \frac{3}{8}$$

Άσκηση 6. Υποθέστε ότι ήσασταν αρκετά απερίσκεπτοι ώστε να σώσετε την εργασία σας στο HY-150 μόνο σε μία δισκέτα, η οποία δυστυχώς κράσαρε. Ακόμα χειρότερα, την είχατε φυλάξει σε ένα συρτάρι με άλλες τρεις επίσης χαλασμένες δισκέτες. Πριν πάρετε τις 4 δισκέτες σε έναν ειδικό για να ανακτήσετε την εργασία σας, ένας φίλος σας προσφέρεται να ρίξει μία ματιά και να σας γλυτώσει από τα έξοδα. Επιλέγετε λοιπόν τυχαία μία δισκέτα και την παραδίδετε στον φίλο σας. Αν η εργασία σας βρίσκεται στη δισκέτα που δίνετε στο φίλο σας, αυτός θα την ανακτήσει με πιθανότητα p . Δεδομένου ότι ψάχνει στη δισκέτα 1 αλλά δεν μπορεί να ανακτήσει την εργασία σας, ποια είναι η πιθανότητα ότι η εργασία σας βρίσκεται στην δισκέτα i , $i = 1, 2, 3, 4$;

Βοήθεια: Έστω A το ενδεχόμενο ότι ο φίλος σας ψάχνει στη δισκέτα 1 και δε βρίσκει τίποτα, και έστω B_i το ενδεχόμενο ότι η εργασία σας είναι στη δισκέτα i . Περιγράψτε το δειγματοχώρο αυτού του πειράματος τύχης με χρήση δενδρικού διαγράμματος και χρησιμοποιείστε το νόμο του Bayes.

Λύση.

Έστω A το ενδεχόμενο ότι ο φίλος σας ψάχνει στη δισκέτα 1 και δε βρίσκει τίποτα, και έστω B_i το ενδεχόμενο ότι η εργασία σας είναι στη δισκέτα i . Ο δειγματικός χώρος φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Δενδρική αναπαράσταση Άσκησης 7.

Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα B_1 , B_2 , B_3 και B_4 αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου. Όποτε, εφαρμόζουμε τον κανόνα του Bayes για να βρούμε την πιθανότητα ότι η εργασία βρίσκεται στη δισκέτα i δεδομένου ότι ο φίλος ψάχνει στη δισκέτα 1 αλλά δεν μπορεί να την ανακτήσει:

$$\begin{aligned} P(B_i|A) &= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) + P(B_4)P(A|B_4)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}P(A|B_i)}{\frac{1}{4} \cdot (1-p) + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1} = \frac{P(A|B_i)}{4-p} \end{aligned}$$

Άρα,

$$P(B_i|A) = \begin{cases} (1-p)/(4-p) & , \text{για } i = 1 \\ 1/(4-p) & , \text{για } i = 2, 3, 4 \end{cases}$$

Άσκηση 7. Το πρόβλημα αυτό εξετάζει την κατανόησή σας για την έννοια της ανεξαρτησίας. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το μέρος (α) για να απαντήσετε το (γ).

(α) Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση: Αν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα και $B \subset A$, τότε $P(B) = 0$ ή $P(A) = 1$.

(β) Ρίχνετε ένα δίκαιο κέρμα n φορές. Έστω $n = 3$. Ορίζουμε τα γεγονότα $A = \{\text{έρχονται τουλάχιστον 2 γράμματα}\}$ και $B = \{\text{έρχονται μία ή δύο 2 κεφαλές}\}$. Είναι τα A και B ανεξάρτητα;

(γ) Επαναλάβετε το μέρος (β) για $n = 4$.

Λύση.

(α) Καθώς τα A και B είναι ανεξάρτητα, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Επίσης, αφού το B είναι υποσύνολο του A , $P(A \cap B) = P(B)$. Επομένως, $P(B) = P(A)P(B)$, και συνεπώς $P(B) = 0$ ή $P(A) = 1$.

(β) Ο δειγματοχώρος αυτού του πειράματος τύχης είναι

$$\Omega = \{KKK, KKT, KTK, KTT, GKK, GKT, GTK, GTT\}.$$

Το γεγονός A είναι:

$$A = \{KTT, GKT, GTK, GTT\},$$

με $P(A) = \frac{4}{8}$, ενώ το B είναι:

$$B = \{KKT, KTK, KTT, GKK, GKT, GTK\},$$

με $P(B) = \frac{6}{8}$. Η τομή των A και B είναι το γεγονός "ακριβώς μία κεφαλή":

$$A \cap B = \{KTT, GKT, GTK\},$$

με $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Καθώς $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα.

(γ) Σε αυτή την περίπτωση μπορείτε να παρατηρήσετε ότι $B \subset A$ καθώς το A περιέχει όλα τα δειγματοσημεία του B συν το GTT . Αν τα A και B ήταν και ανεξάρτητα τότε από το (α) θα έπρεπε είτε $P(B) = 0$ ή $P(A) = 1$. Αλλά προφανώς $P(B) > 0$ (π.χ. το B περιέχει το απλό ενδεχόμενο KTT) και $P(A) < 1$ (το A δεν περιέχει το ενδεχόμενο GKK). Επομένως, τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.