

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 1
Επιμέλεια: Σοφία Σαββάκη

Άσκηση 1.

Ο εκφωνητής του δελτίου καιρού δίνει τις ακόλουθες πιθανότητες για τον καιρό τις επόμενες δύο μέρες:

α') Βροχή σήμερα: 0.3

β') Βροχή αύριο: 0.5

γ') Βροχή σήμερα και αύριο: 0.2

δ') Βροχή σήμερα ή αύριο: 0.7

Είναι αυτό το δελτίο καιρού συμβατό με τα αξιώματα των Πιθανοτήτων;

Λύση.

Έστω A το γεγονός ότι θα βρέξει σήμερα και B το γεγονός ότι θα βρέξει αύριο. Το γεγονός ότι θα βρέξει και σήμερα και αύριο μπορεί να εκφραστεί ως η τομή των γεγονότων A και B δηλαδή $A \cap B$. Επιπλέον, το γεγονός ότι θα βρέξει είτε σήμερα είτε αύριο είναι η ένωση των γεγονότων A και B δηλαδή $A \cup B$. Μία από τις ιδιότητες των Πιθανοτήτων είναι η ακόλουθη:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Παρατηρούμε ότι: $P(A \cup B) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την πιθανότητα 0.7 που έχει δοθεί από τον εκφωνητή για το ίδιο γεγονός $A \cup B$ (μέρος **(δ)** της εκφώνησης).

Άσκηση 2.

Τέσσερις ομάδες μετέχουν σε ένα τουρνουά: Ο Ηρακλής, ο Άρης, ο Απόλλων και ο Ατρόμητος. Ο Ηρακλής έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά απ' ότι ο Απόλλων και ο Άρης έχει τέσσερις φορές μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά απ' ότι ο Ατρόμητος. Αν ο Ηρακλής έχει πέντε φορές μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά απ' ότι ο Ατρόμητος, ποια είναι η πιθανότητα του γεγονότος ότι ο Ηρακλής ή ο Απόλλων κερδίζουν το τουρνουά;

Λύση.

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$H_p = \{ \text{Το παιχνίδι κερδίζει ο Ηρακλής} \}$

$A_p = \{ \text{Το παιχνίδι κερδίζει ο Άρης} \}$

$A_{\pi} = \{ \text{Το παιχνίδι κερδίζει ο Απόλλων} \}$

$A_t = \{ \text{Το παιχνίδι κερδίζει ο Ατρόμητος} \}$

Μας δίδεται ότι

$$P(H\rho) = 2P(A\pi) \quad (2.1)$$

$$P(A\rho) = 4P(A\tau) \quad (2.2)$$

$$P(H\rho) = 5P(A\tau) \quad (2.3)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι

$$P(H\rho) + P(A\rho) + P(A\pi) + P(A\tau) = 1 \quad (2.4)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.1), (2.2), (2.3) στην (2.4) έχουμε

$$5P(A\tau) + 4P(A\tau) + 0.5P(H\rho) + P(A\tau) = 1$$

$$5P(A\tau) + 4P(A\tau) + 2.5P(A\tau) + P(A\tau) = 1$$

$$12.5P(A\tau) = 1$$

$$P(A\tau) = \frac{1}{12.5} = \frac{2}{25} = 0.08$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας στις (2.1), (2.2), (2.3) έχουμε:

$$P(H\rho) = 0.4$$

$$P(A\rho) = 0.32$$

$$P(A\pi) = 0.2$$

Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα του γεγονότος ότι ο Ηρακλής ή ο Απόλλων κερδίζουν το τουρνουά θα είναι

$$P(H\rho \cup A\pi) = P(H\rho) + P(A\pi) = 0.4 + 0.2 = 0.6 \quad (H\rho \text{ και } A\pi: \text{ Ασυμβίβαστα/Ξένα γεγονότα})$$

Άσκηση 3.

Τρεις παίκτες A, B και C ρίχνουν με αυτή τη σειρά ένα κέρμα. Ο πρώτος που θα φέρει κορώνα κερδίζει (οπότε και το παιχνίδι τελειώνει). Δώστε μια περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω για αυτό το πείραμα τύχης. Με βάση την περιγραφή σας ορίστε τα ακόλουθα γεγονότα στον Ω :

$$\alpha') A = \{\text{Κερδίζει ο } A\}$$

$$\beta') B = \{\text{Κερδίζει ο } B\}$$

$$\gamma') (A \cup B)^c$$

Λύση.

Ο δειγματοχώρος του πειράματος μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\Omega = \{\underbrace{000}_{\text{000}}\underbrace{000}_{\text{000}}0\cdots 00\cdots, \quad 1, \quad 01, \quad 001, \quad \underbrace{000}_{\text{000}}1, \quad \underbrace{000}_{\text{000}}01, \quad \underbrace{000}_{\text{000}}001\cdots\}$$

(Το 0 αναπαριστά τα γράμματα και το 1 την κορώνα στην εκάστοτε ρίψη.)

$\alpha')$ Με βάση την παραπάνω περιγραφή το γεγονός A ορίζεται ως:

$$A = \{1, \quad \underbrace{000}_{\text{000}}1, \quad \underbrace{000}_{\text{000}}\underbrace{000}_{\text{000}}1, \quad \dots\}$$

β') Το γεγονός B ως:

$$B = \{01, \underbrace{000}_{000}01, \underbrace{000}_{000}\underbrace{000}_{000}01, \dots\}$$

γ') Μας ζητείται να ορίσουμε το γεγονός να μην κερδίσει κανένας ή να κερδίσει ο παίχτης C . (Κάντε το διάγραμμα Venn για να το δείτε σχηματικά). Έχουμε λοιπόν:

$$(A \cup B)^c = \{\underbrace{000}_{000}\underbrace{000}_{000}0 \dots 00 \dots, 001, \underbrace{000}_{000}001, \underbrace{000}_{000}\underbrace{000}_{000}001, \dots\}$$

Άσκηση 4.

Τα ακόλουθα δεδομένα συλλέχθηκαν σε μία έρευνα ενός συνόλου 1000 συνδρομητών κάποιου περιοδικού αναφορικά με την εργασία, την οικογενειακή κατάσταση και τη μόρφωση. Υπήρχαν 312 επαγγελματίες, 470 παντρεμένοι, 525 απόφοιτοι παν/μίου, 42 επαγγελματίες απόφοιτοι παν/μίου, 147 παντρεμένοι απόφοιτοι παν/μίου, 86 παντρεμένοι επαγγελματίες και 25 παντρεμένοι επαγγελματίες απόφοιτοι παν/μίου. Αποδείξτε ότι τα νούμερα που αναφέρθηκαν στη μελέτη πρέπει να είναι ανακριβή.

Βοήθεια: Έστω M, W και G τα σύνολα των επαγγελματιών, παντρεμένων και απόφοιτων παν/μίου αντίστοιχα. Υποθέστε ότι ένας από τους 1000 αναγνώστες επιλέγεται τυχαία και δείξτε ότι αν τα νούμερα είναι ακριβή τότε $P(M \cup W \cup G) > 1$.

Λύση.

Έστω

$$M = \{\text{Ένας τυχαία επιλεγμένος αναγνώστης είναι επαγγελματίας}\}$$

$$W = \{\text{Ένας τυχαία επιλεγμένος αναγνώστης είναι παντρεμένος}\}$$

$$G = \{\text{Ένας τυχαία επιλεγμένος αναγνώστης είναι απόφοιτος παν/μίου}\}$$

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε: $P(M) = \frac{312}{1000}$

$$P(W) = \frac{470}{1000}$$

$$P(G) = \frac{525}{1000}$$

$$P(M \cap G) = \frac{42}{1000}$$

$$P(W \cap G) = \frac{147}{1000}$$

$$P(M \cap W) = \frac{86}{1000}$$

$$P(M \cap W \cap G) = \frac{25}{1000}$$

Θα δείξουμε ότι $P(M \cup W \cup G) > 1$ με πράξεις και ιδιότητες

Υπενθύμιση :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

Διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} P(M \cup W \cup G) &= P((M \cup W) \cup G) \\ &= P(M \cup W) + P(G) - P((M \cup W) \cap G) \\ &= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - P((M \cap G) \cup (W \cap G)) \\ &= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - (P(M \cap G) + P(W \cap G) - P(M \cap G \cap W)) \\ &= P(M) + P(W) - P(M \cap W) + P(G) - P(M \cap G) - P(W \cap G) + P(M \cap G \cap W) \\ &= \frac{312 + 470 + 525 + 25 - (147 + 42 + 86)}{1000} \\ &= \frac{1057}{1000} > 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Ο Γιάννης έχει ένα ζευγάρι από "πειραγμένα" τετράεδρα ζάρια. Σε κάθε ρίψη, η πιθανότητα να φέρει ένα οποιοδήποτε ζεύγος είναι ανάλογη του γινομένου των δύο αριθμών που έφεραν τα ζάρια.

- α') Περιγράψτε το δειγματοχώρο του πειράματος
 β') Ποια η πιθανότητα το γινόμενο να είναι ζυγός αριθμός;
 γ') Ποια η πιθανότητα να φέρει το ένα ζάρι 2 και το άλλο 3;

Λύση.

- α') $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (4, 3), (4, 4)\}$

Το πρόβλημα ορίζει ότι η πιθανότητα για κάποιο ζευγάρι (κ, λ) που ρίχνουμε είναι

$$P(\{(\kappa, \lambda)\}) = c \cdot \kappa \cdot \lambda, \quad \text{για κάποια σταθερά } c$$

Οι τιμές του $\kappa \cdot \lambda$ για όλα τα στοιχεία του δειγματοχώρου δίνονται από τον παρακάτω πίνακα :

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Για να βρούμε το νόμο πιθανοτήτων, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα με τη σταθερά κανονικοποίησης c . Για να υπολογίσουμε την σταθερά c χρησιμοποιούμε το αξίωμα της κανονικοποίησης που απαιτεί:

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \{1,2,3,4\}} \sum_{\lambda \in \{1,2,3,4\}} P(\{(\kappa, \lambda)\}) &= 1 \\ 1c + 2c + 3c + 4c + 2c + 4c + 6c + 8c + & \\ 3c + 6c + 9c + 12c + 4c + 8c + 12c + 16c &= 1 \\ 100c &= 1 \\ c &= 0.01 \end{aligned}$$

Συνεπώς ο νόμος πιθανοτήτων για κάθε υποσύνολο του δειγματοχώρου μπορεί να υπολογιστεί ως :

$$P(\{(\kappa, \lambda)\}) = \frac{\kappa \cdot \lambda}{100}$$

β')

$$\begin{aligned} P(\kappa \cdot \lambda = \text{ζυγός}) &= P(1, 2) + P(1, 4) + P(2, 1) + P(2, 2) + P(2, 3) + P(2, 4) + \\ & P(3, 2) + P(3, 4) + P(4, 1) + P(4, 2) + P(4, 3) + P(4, 4) \\ &= \frac{1}{100} \cdot (2 + 4 + 2 + 4 + 6 + 8 + 6 + 12 + 4 + 8 + 12 + 16) \\ &= \frac{84}{100} \end{aligned}$$

γ')

$$\begin{aligned} P((\kappa = 2, \lambda = 3) \cup (\kappa = 3, \lambda = 2)) &= P(2, 3) + P(3, 2) \\ &= \frac{1}{100} \cdot (2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) \\ &= \frac{12}{100} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

Μία τάξη έχει 40 φοιτητές. Από αυτούς,

- 1) 12 δεν είναι στο Facebook.
- 2) 15 είναι στο Facebook και στο Twitter.
- 3) Τα $\frac{5}{9}$ αυτών που δεν είναι στο Twitter έχουν iPhone.
- 4) 8 είναι στο Facebook και στο Twitter και έχουν iPhone.
- 5) 7 δεν είναι στο Twitter και δεν έχουν iPhone, αλλά είναι στο Facebook.
- 6) Τα $\frac{2}{3}$ αυτών που δεν είναι στο Facebook και δεν έχουν iPhone, είναι στο Twitter.

- α') Ποια η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής δεν είναι στο Facebook ούτε στο Twitter και δεν έχει iPhone;
- β') Ποια η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής δεν είναι στο Facebook, αλλά είναι στο Twitter και έχει iPhone;

Λύση.

Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα

$$F = \{\text{Ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής έχει Facebook}\}$$

$$T = \{\text{Ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής έχει Twitter}\}$$

$$I = \{\text{Ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής έχει iPhone}\}$$

Η τάξη έχει συνολικά 40 φοιτητές. Τα δεδομένα μπορούν να εκφραστούν σε πληθάριθμους συνόλων ως εξής:

- 1) 12 δεν είναι στο Facebook $\Rightarrow |F| = 40 - 12 = 28$ είναι στο Facebook
- 2) 15 είναι στο Facebook και στο Twitter $\Rightarrow |F \cap T| = 15$
- 3) Τα $\frac{5}{9}$ αυτών που δεν είναι στο Twitter έχουν iPhone
Δηλαδή αυτοί που δεν είναι στο Twitter και έχουν iPhone, είναι τα $\frac{5}{9}$ αυτών που δεν είναι στο Twitter $\Rightarrow \frac{|T^c \cap I|}{|T^c|} = \frac{5}{9}$
- 4) 8 είναι στο Facebook και στο Twitter και έχουν iPhone $\Rightarrow |F \cap T \cap I| = 8$
- 5) 7 δεν είναι στο Twitter και δεν έχουν iPhone, αλλά είναι στο Facebook $\Rightarrow |T^c \cap I^c \cap F| = 7$
- 6) Τα $\frac{2}{3}$ αυτών που δεν είναι στο Facebook και δεν έχουν iPhone, είναι στο Twitter
Δηλαδή αυτοί που δεν είναι στο Facebook και δεν έχουν iPhone και είναι στο Twitter, είναι τα $\frac{2}{3}$ αυτών που δεν είναι στο Facebook και δεν έχουν iPhone $\Rightarrow \frac{|F^c \cap I^c \cap T|}{|F^c \cap I^c|} = \frac{2}{3}$

Για τη λύση του προβλήματος χρησιμοποιούμε τον λεγόμενο πίνακα Karnaugh που περιέχει όλες τις πιθανές τομές γεγονότων ανά τρεις. Συμβολίζουμε με F, T και I το εκάστοτε γεγονός. Θα τον γεμίσουμε χρησιμοποιώντας τα δεδομένα/πληθάριθμους της άσκησης. Στις θέσεις του πίνακα για τις οποίες δεν έχουμε πληροφορία από τα δεδομένα θα τοποθετήσουμε μεταβλητές.

	F	F	F^c	F^c
I	8	6	$12 - x - y - z$	x
I^c	7	7	y	z
	T	T^c	T	T^c

Έχουμε ότι (χρησιμοποιείστε και ένα διάγραμμα Venn για να το δείτε)

- Από **(4)** : $|F \cap T \cap I| = 8$
- Από **(2)** : $|F \cap T| = 15 \Leftrightarrow |F \cap T \cap I^c| = 15 - 8 = 7$
- Από **(5)** : $|T^c \cap I^c \cap F| = 7$
- Από **(1)** : $|F| = 28 \Leftrightarrow |T^c \cap I \cap F| = 28 - 8 - 7 - 7 = 6$

Για τις υπόλοιπες τομές γεγονότων δεν έχουμε στοιχεία από τα δεδομένα οπότε θα τοποθετήσουμε τις μεταβλητές x , y , z στα υπόλοιπα κελιά και στο 4ο άγνωστο κελί θα χρησιμοποιήσουμε το δεδομένο ότι $|F^c| = 12$, άρα θα τοποθετήσουμε εκεί την τιμή $12 - x - y - z$ (για να εξαλείψουμε τον 4ο άγνωστο).

Ακόμα έχουμε ότι

- Από **(3)** : $\frac{|T^c \cap I|}{|T^c|} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{6+x}{6+7+x+z} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 4x - 5z = 11$ (6.1)

- Από **(6)** : $\frac{|F^c \cap I^c \cap T|}{|F^c \cap I^c|} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{y}{y+z} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = 2z$ (6.2)

Από την (6.1) προκύπτει ότι

$$(x, z) \in \{(4, 1), (9, 5)\}$$

Όμως η λύση $(9, 5)$ απορρίπτεται γιατί μας δίδεται από **(1)** ότι $|F^c| = 12$. Άρα τελικά $x = 4, z = 1$ και $y = 2$ (από (6.2)).

Ο πίνακας Karnaugh διαμορφώνεται ως εξής

	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F^c</i>	<i>F^c</i>
<i>I</i>	8	6	5	4
<i>I^c</i>	7	7	2	1
	<i>T</i>	<i>T^c</i>	<i>T</i>	<i>T^c</i>

α') Μας ζητείται η πιθανότητα του γεγονότος $F^c \cap T^c \cap I^c$.

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι $|F^c \cap T^c \cap I^c| = 1$, άρα $P(F^c \cap T^c \cap I^c) = \frac{1}{40}$.

β') Μας ζητείται η πιθανότητα του γεγονότος $F^c \cap T \cap I$.

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι $|F^c \cap T \cap I| = 5$, άρα $P(F^c \cap T \cap I) = \frac{5}{40}$.