

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

11ο Φροντιστήριο - Θέματα Εξετάσεων από προηγούμενα έτη

Επιμέλεια: Κωνσταντίνα Φωτιάδου

Άσκηση 1. Μια συνεχής τ.μ X έχει Α.Σ.Κ:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^3}{x^3}, & x > a \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

όπου $a > 0$, θετική σταθερά. Να υπολογισθούν:

(α) Η σ .π.π. της τ.μ X

(β) Η μέση τιμή $E[X]$ και η διασπορά σ_X^2 της X .

(γ) Η πιθανότητα: $P(X \leq 2a)$

(δ) Η πιθανότητα: $P(|X| \leq 3a)$

(ε) Η πιθανότητα: $P(X > 2a \mid |X| \leq 3a)$

Λύση.

(α) Παραγωγίζουμε την Α.Σ.Κ ως εξής:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 3a^3x^{-4}, & x \geq a \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(β)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^{+\infty} x \cdot 3a^3 x^{-4} dx = \int_a^{+\infty} 3a^3 x^{-3} dx = 3a^3 \left(-\frac{1}{2} x^{-2} \right) \Big|_a^{+\infty} = 3a^3 \left(\frac{1}{2} a^{-2} \right) = \frac{3a}{2}$$

Ροπή δεύτερης τάξης:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_a^{+\infty} x^2 3a^3 x^{-4} dx = \int_a^{+\infty} 3a^3 x^{-2} dx = 3a^3 \left(-x^{-1} \right) \Big|_a^{+\infty} = 3a^3 \cdot a^{-1} = 3a^2$$

Επομένως,

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 3a^2 - \left(\frac{3a}{2} \right)^2 = 3a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$P(X \leq 2a) = F_X(2a) = 1 - \frac{a^3}{(2a)^3} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

(δ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(|X| \leq 3\alpha) = P(-3\alpha \leq X \leq 3\alpha) = F_X(3\alpha) - F_X(-3\alpha) = 1 - \frac{\alpha^3}{(3\alpha)^3} - 0 = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

(ε) Έχουμε:

$$\begin{aligned} P[(X > 2\alpha) | (|X| \leq 3\alpha)] &= \frac{P[X > 2\alpha] \cap |X| \leq 3\alpha}{P(|X| \leq 3\alpha)} = \frac{P[2\alpha < X \leq 3\alpha]}{F_X(3\alpha)} = \frac{F_X(3\alpha) - F_X(2\alpha)}{F_X(3\alpha)} \\ &= \frac{1 - \frac{\alpha^3}{(3\alpha)^3} - 1 + \frac{\alpha^3}{(2\alpha)^3}}{1 - \frac{\alpha^3}{(3\alpha)^3}} = \frac{\frac{26}{27} - 1 + \frac{1}{8}}{\frac{26}{27}} \approx 0.0913 \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Η τ.μ X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή -10 και διασπορά 4: $X \sim N(-10, 4)$.

(α) Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

(i) $P(X < 0)$

(ii) $P(-10 < X < 5)$

(iii) $P(|X| \geq 5)$

(iv) $P(X^2 - 3X + 2 > 0)$

(β) Το πλάτος του μεταλλικού ίχνους σένα ηλεκτρικό κύκλωμα μοντελοποιείται ως μια κανονική τ.μ W με μέση τιμή $\mu = 0.9$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.003$. Κυκλώματα των οποίων το πλάτος του ίχνους δε βρίσκεται εντός του εύρους τιμών θεωρούνται ελαττωματικά. Τι ποσοστό των κυκλωμάτων είναι ελαττωματικά; Εκφράστε τις απαντήσεις σας βάσει των τιμών $\Phi(x)$ της Α.Σ.Κ της τυπικής Γκαουσιανής, για $x > 0$.

Λύση

(α) Οι ζητούμενες πιθανότητες γίνονται:

(i)

$$P(X < 0) = P\left(\frac{X - (-10)}{2} < \frac{0 - (-10)}{2}\right) = P\left(\frac{X + 10}{2} < 5\right) = \Phi(5)$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(-10 < X < 5) &= P\left[\frac{-10 - (-10)}{2} < \frac{X - (-10)}{2} < \frac{5 - (-10)}{2}\right] \\ &= P\left[0 < \frac{X + 10}{2} < 7.5\right] = \Phi(7.5) - \Phi(0) = \Phi(7.5) - 1/2 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} P(|X| \geq 5) &= P(X \geq 5) + P(X \leq -5) = 1 - P(X \leq 5) + P(X \leq -5) \\ &= 1 - P\left[\frac{X - (-10)}{2} \leq \frac{5 - (-10)}{2}\right] + P\left[\frac{X - (-10)}{2} \leq \frac{-5 - (-10)}{2}\right] \\ &= 1 - P\left[\frac{X + 10}{2} \leq 7.5\right] + P\left[\frac{X + 10}{2} \leq 2.5\right] = 1 - \Phi(7.5) + \Phi(2.5) \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
P(X^2 - 3X + 2 > 0) &= P[(X - 1) \cdot (X - 2)] = P(X > 1 \cap X > 2) + P(X < 1 \cap X < 2) \\
&= P(X > 2) + P(X < 1) \\
&= P\left[\frac{X - (-10)}{2} > \frac{2 - (-10)}{2}\right] + P\left[\frac{X - (-10)}{2} < \frac{1 - (-10)}{2}\right] \\
&= P[Y > 6] + P[Y < 5.5] = 1 - \Phi(6) + \Phi(5.5)
\end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
P[|W - 0.9| > 0.005] &= P[W > 0.905] + P[W < 0.895] \\
&= 1 - P\left[\frac{W - 0.9}{0.003} < \frac{0.905 - 0.9}{0.003}\right] + P\left[\frac{W - 0.9}{0.003} < \frac{0.895 - 0.9}{0.003}\right] \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{0.005}{0.003}\right) + \Phi\left(\frac{-0.005}{0.003}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) + \Phi\left(\frac{-5}{3}\right) \\
&= 2\left[1 - \Phi(5/3)\right] \approx 0.095
\end{aligned}$$

Άσκηση 3. Ένας εργοστάσιο παράγει μικρο-επεξεργαστές σε 2 γραμμές παραγωγής. Οι δύο γραμμές παράγουν το ίδιο πλήθος μικρο-επεξεργαστών. Όλοι οι μικρο-επεξεργαστές μοιάζουν μεταξύ τους, αλλά η διάρκεια ζωής ενός μικρο-επεξεργαστή που προέρχεται από τη γραμμή 1 είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο $[0, 2]$, ενώ η διάρκεια ζωής ενός μικρο-επεξεργαστή που προέρχεται από τη γραμμή 2 είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο $\lambda = 0.1(\text{έτη})^{-1}$

(α) Η Δέσποινα αγόρασε 1 μικρο-επεξεργαστή ο οποίος μετά από 5 χρόνια συνεχίζει να λειτουργεί. Βρείτε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι θα λειτουργήσει για ακόμη 3 χρόνια.

(β) Ο Κώστας αγόρασε 1 μικρο-επεξεργαστή ο οποίος μετά από 1 χρόνο λειτουργεί ακόμη. Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι θα λειτουργήσει για τουλάχιστον ακόμη 3 χρόνια;

Λύση.

(α)

Ο μικρο-επεξεργαστής λειτουργεί μετά από 5 χρόνια. Άρα, προέρχεται από τη γραμμή 2. Η διάρκεια ζωής ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 0.1(\text{έτη})^{-1}$. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(L \geq 5 + 3 | L \geq 5) = \frac{P(L \geq 8)}{P(L \geq 5)} = \frac{0.1e^{-0.1 \cdot 8}}{0.1 \cdot e^{-0.1 \cdot 5}} = e^{-0.3} \approx 0.74$$

(β)

Σε αυτή τη περίπτωση ο μικρο-επεξεργαστής θα προέρχεται είτε από τη γραμμή 1, είτε από τη γραμμή 2.

Θεωρούμε το ενδεχόμενο: $B = \{\text{Ο μικρο-επεξεργαστής προέρχεται από τη γραμμή 1}\}$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(L \geq c) = P(L \geq c | B) \cdot P(B) + P(L \geq c | B^c) \cdot P(B^c) = \frac{1}{2} \cdot P(L \geq c | B) + \frac{1}{2} \cdot P(L \geq c | B^c)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι: $f_{L|B}(\ell) \sim U[0, 2]$ και $f_{L|B^c}(\ell) \sim \exp(\lambda = 0.1)$

Επομένως έχουμε:

$$P(L \geq c) = \begin{cases} 1, & c < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (2 - c) + \frac{1}{2} \cdot e^{-0.1 \cdot c}, & 0 \leq c < 2 \\ \frac{1}{2} \cdot e^{-0.1 \cdot c}, & c \geq 2 \end{cases}$$

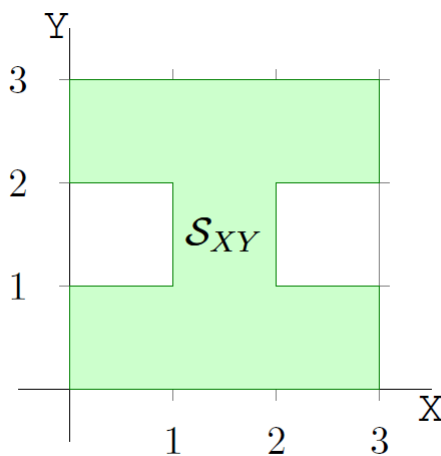
Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(L \geq 1 + 3 \mid L \geq 1) = \frac{P(L \geq 4)}{P(L \geq 1)} = \frac{1/2 \cdot e^{-0.1 \cdot 4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot e^{-0.1 \cdot 1}} \approx 0.47$$

Άσκηση 4. Οι συνεχείς τ.μ X, Y έχουν σύνολο τιμών το γραμμοσκιασμένο χωρίο S_{XY} . Οι X, Y έχουν από κοινού ομοιόμορφη κατανομή:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in S_{X,Y} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Να υπολογισθούν:



Σχήμα 1: Το πεδίο τιμών για τις τ.μ (X, Y) της άσκησης 4.

(α) Η τιμή της σταθεράς c .

(β) Η πιθανότητα: $P(Y < X - 1)$

(γ)

Η πιθανότητα: $P(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > 0.5^2$

(δ) Η σ.π.π. της τ.μ X .

Λύση

(α)

Από το σχήμα έχουμε:

$$E_{S_{XY}} = E - 2 \cdot E_{\text{Τετραγώνου}} = 9 - 2 \cdot 1 = 7$$

Επομένως,

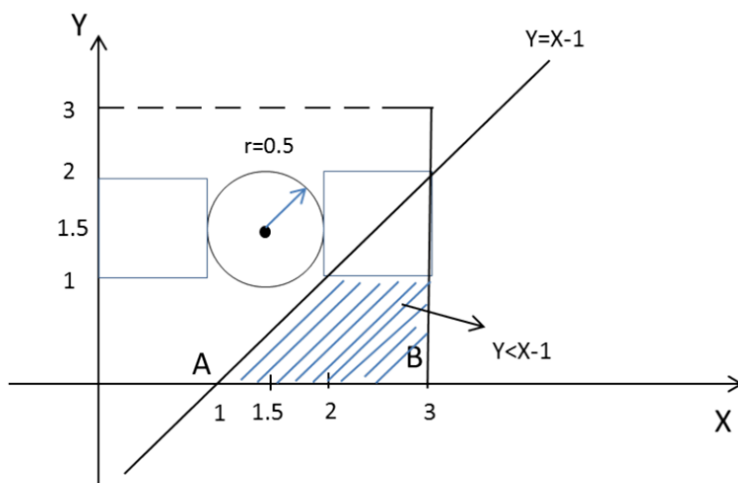
$$c \cdot E_{S_{XY}} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{7}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$P(Y < X - 1) = E_{AB\Gamma\Delta} \cdot c = \frac{1+2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{14}$$

(γ) Είναι η πιθανότητα να βρεθούμε εκτός κύκλου με κέντρο $K(1.5, 1.5)$ και ακτίνα $\rho = 0.5$

$$\begin{aligned} P(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 > 0.5^2 &= 1 - P(X - 1.5)^2 + (Y - 1.5)^2 \leq 0.5^2 \\ &= 1 - E_{\text{κύκλου}} \cdot c = 1 - \pi \rho^2 \cdot c = 1 - \pi \cdot 0.5^2 \cdot \frac{1}{7} \approx 0.88 \end{aligned}$$



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση ερωτημάτων ασκ. 4 (β) και (γ)

(δ) Η σ.π.π. της τ.μ X θα είναι:

• Για $x < 0$ και $x \geq 3$: $f_X(x) = 0$

• Για $0 \leq x < 1$, έχουμε:

$$f_X(x) = \int_{y=0}^1 c dy + \int_{y=2}^3 c dy = c \cdot y \Big|_0^1 + y \Big|_2^3 = \frac{1}{7} \cdot (1 - 0) + \frac{1}{7} \cdot (3 - 2) = \frac{2}{7}$$

• Για $1 \leq x < 2$, έχουμε:

$$f_X(x) = \int_{y=0}^3 c dy = c \cdot y \Big|_0^3 = \frac{1}{7} y \Big|_0^3 = \frac{3}{7}$$

• Για $2 \leq x < 3$, έχουμε:

$$f_X(x) = \int_{y=0}^1 c dy + \int_{y=2}^3 c dy = \frac{2}{7}$$

Επομένως, έχουμε:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2/7, & 0 \leq x < 1, 2 \leq x < 3 \\ 3/7, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Άσκηση 5. Η τ.μ X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των τιμών $[1,2]$, $X \sim U[1,2]$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό: $Y = e^{-2X}$. Να βρεθούν:

(α) Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$ καθώς και της σ.π.π. $f_X(x)$ της X .

(β) Η Α.Σ.Κ $F_Y(y)$ της Y

(γ) Η σ.π.π. $f_Y(y)$ καθώς και η γραφική της παράσταση.

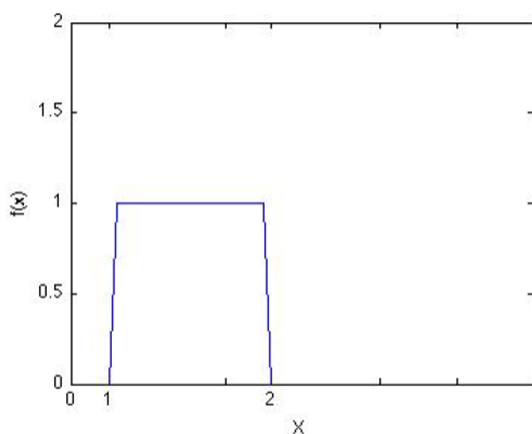
(δ) Η πιθανότητα: $P(Y \leq e^{-3})$

Λύση

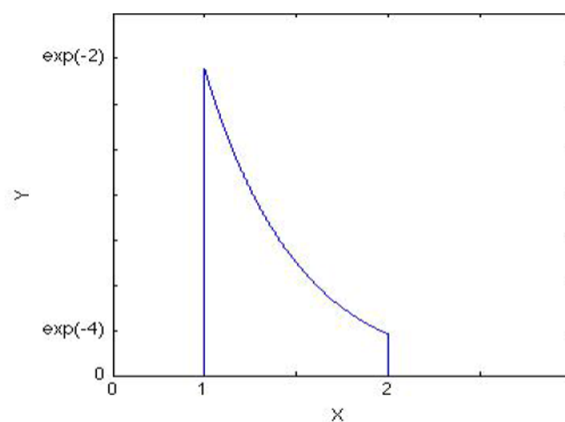
(α)

Οι γραφικές παραστάσεις του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$ και της σ.π.π. $f_X(x)$ της X φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

(β) Έχουμε ότι:



(a)



(b)

Σχήμα 3: (α) Το πεδίο τιμών της σ.π.π. $f_X(x)$ της τ.μ. X . (β) Το πεδίο τιμών του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$.

- Για $y < e^{-4} \Leftrightarrow F_Y(y) = 0$
- Για $y \geq e^{-2}, \Leftrightarrow F_Y(y) = 1$
- Για $y \in [e^{-4}, e^{-2}]$;

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y < y) = P(e^{-2X} < y) = P(-2X < \ln Y) = P(X > -\frac{1}{2} \ln y) \\
 &= \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^{+\infty} f_X(x) dx \\
 &= \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 f_X(x) dx = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 1 dx = 2 + \frac{1}{2} \ln y
 \end{aligned}$$

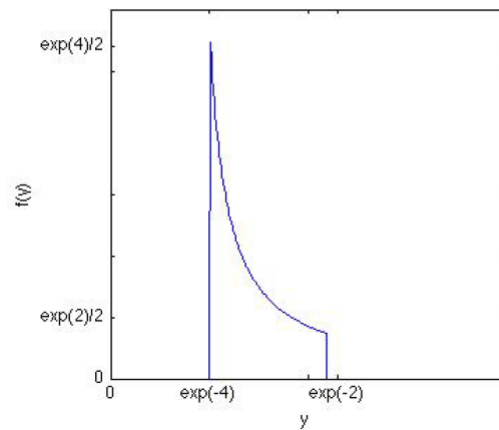
Επομένως έχουμε:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < e^{-4} \\ 2 + \frac{1}{2} \ln y, & y \in [e^{-4}, e^{-2}] \\ 1, & y > e^{-2} \end{cases}$$

(γ) Παραγωγίζουμε την Α.Σ.Κ ως εξής:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2y}, & e^{-4} \leq y \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 4: (α) Το πεδίο τιμών της σ.π.π. $f_Y(y)$ του μετασχηματισμού Y

(δ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(Y \leq e^{-3}) = F_Y(e^{-3}) = 2 + \frac{1}{2} \ln e^{-3} = 2 - \frac{3}{2} \ln e = 2 - \frac{3}{2}$$