

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

10ο Φροντιστήριο

Επιμέλεια: Κωνσταντίνα Φωτιάδου

Άσκηση 1. Έστω 3 ανεξάρτητες τ.μ X, Y, W . Οι τ.μ X, Y είναι εκθετικά κατανομημένες με παράμετρο λ , ενώ η τ.μ W είναι *Bernoulli* με παράμετρο $p = 1/2$.

Ορίζουμε νέα τ.μ Z ως εξής:

$$Z = WX - (1 - W) \cdot Y$$

Δηλαδή:

$$\text{Για } W = 1 \Leftrightarrow Z = X$$

$$\text{Για } W = 0 \Leftrightarrow Z = -Y$$

(α) Να δώσετε τις γραφικές παραστάσεις για την Α.Σ.Κ, $F_Z(z)$ και τη σ.π.π, $f_Z(z)$ της τ.μ Z .

(β) Μετασχηματίζουμε την τ.μ Z ως εξής:

$$V = g(Z) = \begin{cases} Z + 1, & -1 \leq Z < 0 \\ 1 - \frac{Z}{3}, & 0 \leq Z < 3 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(ι) Να δώσετε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $V = g(Z)$

(ιι) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος: $V = 0$

(ιιι) Υπολογίστε την Α.Σ.Κ, $F_V(v)$ και τη σ.π.π $f_V(v)$ της τ.μ. V .

Λύση

(α') Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$X \sim \exp(\lambda), \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \quad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$Y \sim \exp(\lambda), \quad f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0 \quad F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Ο.Π., έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\
&= P(Z \leq z/W = 1) \cdot P(W = 1) + P(Z \leq z/W = 0) \cdot P(W = 0) \\
&= P(X \leq z) \cdot \frac{1}{2} + P(-Y \leq z) \cdot \frac{1}{2} \\
&= \begin{cases} 0 \cdot \frac{1}{2} + P(Y \geq -z) \cdot \frac{1}{2}, & z < 0 \\ P(X \leq z) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}, & z \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (1 - P(Y \leq -z)), & z < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot P(X \leq z) + \frac{1}{2}, & z \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (1 - F_Y(-z)), & z < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot F_X(z) + \frac{1}{2}, & z \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (1 - (1 - e^{-\lambda(-z)})), & z < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-\lambda z}) + \frac{1}{2}, & z \geq 0 \end{cases} \\
\Rightarrow F_Z(z) &= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda z}, & z < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς z έχουμε:

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda z}, & z < 0 \\ \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \end{cases} \\
&= \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z|} \quad \text{διπλή εκθετική σ.π.π.}
\end{aligned}$$

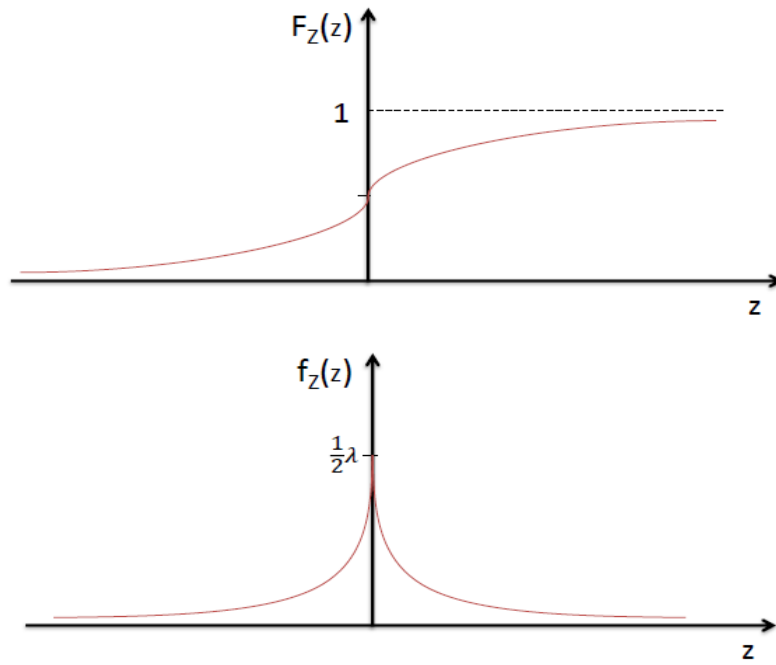
Και οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 1)

(β') (i) Η ζητούμενη γραφική παράσταση (Σχήμα 2)

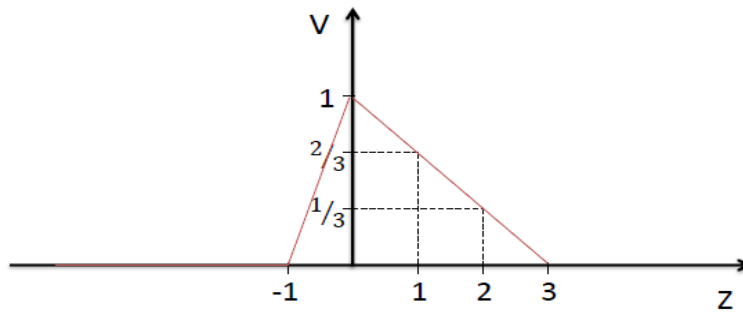
(ii)

$$\begin{aligned}
P(V = 0) &= P(Z \leq -1 \cup Z > 3) = P(Z \leq -1) + P(Z > 3) \\
&= P(Z \leq -1) + 1 - P(Z \leq 3) \\
&= F_Z(-1) + 1 - F_Z(3) = \frac{1}{2}e^{-\lambda} + 1 - (1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda 3}) \\
\Rightarrow P(V = 0) &= \frac{1}{2}e^{-\lambda} + \frac{1}{2}e^{-3\lambda}
\end{aligned}$$

Επομένως, η V είναι μικτή τ.μ.



Σχήμα 1: Γραφική παράσταση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής (πάνω) και συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (κάτω).



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού V .

(iii) Είναι προφανές από το σχήμα ότι $0 \leq V \leq 1$.

- Για $v < 0$:

$$F_V(v) = 0$$

- Για $v \geq 1$:

$$F_V(v) = 1$$

- Για $0 \leq v < 1$:

$$\begin{aligned}
 F_V(v) &= P(V \leq v) \\
 &= P(Z \leq v - 1 \cup Z \geq 3(1 - v)) \\
 &= P(Z \leq v - 1) + P(Z \geq 3(1 - v)) \\
 &= F_Z(v - 1) + 1 - F_Z(3(1 - v)) \\
 &= \frac{1}{2}e^{\lambda(v-1)} + 1 - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda(3(1-v))}\right) \\
 &= \frac{1}{2}e^{-\lambda(1-v)} + \frac{1}{2}e^{-3\lambda(1-v)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\lambda(1-u)} + \frac{1}{2}e^{-3\lambda(1-u)}, & 0 \leq v < 1 \\ 1, & u \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda(1-u)} + \frac{3}{2}\lambda e^{-3\lambda(1-u)}, & 0 < v \leq 1 \\ (\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda} + \frac{1}{2}\lambda e^{-3\lambda})\delta(v), & v = 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 2. Ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζουμε να χρησιμοποιούμε λάμπες, μια κάθε φορά, για να φωτίσουμε ένα δωμάτιο. Κάθε νέα λάμπα επιλέγεται ανεξάρτητα και ισοπίθانا από 2 εταιρίες, Α, Β. Η διάρκεια ζωής (σε ώρες) κάθε λάμπας ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_A = 1$, αν η λάμπα προέρχεται από την εταιρία Α, και $\lambda_B = 3$, αν η λάμπα προέρχεται από την εταιρία Β.

(α) Χρησιμοποιώντας το Θ.Ο.Π υπολογίστε την πιθανότητα $P(D)$, ότι δε θα πραγματοποιηθεί καμία αλλαγή λάμπας τις πρώτες t ώρες του πειράματος.

(β) Δεδομένου ότι δεν έχουμε χαλασμένη λάμπα κατά τη διάρκεια t ωρών του πειράματος, υπολογίστε την πιθανότητα η 1η λάμπα που χρησιμοποιείται να προέρχεται από την Α εταιρία (*Bayes*).

(γ) Χρησιμοποιώντας το Θ.Ο.Μ (θεώρημα ολικής μέσης τιμής) υπολογίστε την μέση τιμή και διασπορά της τ.μ X του χρόνου μέχρι την 1η αλλαγή λάμπας.

(α) Έστω A το γεγονός ότι η λάμπα που επιλέχθηκε είναι της εταιρίας Α (οπότε η X είναι μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = 1$ δεδομένου του γεγονότος A). Τότε το A^c είναι το γεγονός ότι η λάμπα που επιλέχθηκε είναι της εταιρίας Β (οπότε η X είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = 3$ δεδομένου του γεγονότος A^c). Πρώτα υπολογίζουμε τις $P(D|A)$ και $P(D|A^c)$:

$$\begin{aligned} P(D|A) &= P(X > t|A) \\ &= 1 - F_{X|A}(t) \\ &= e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D|A^c) &= P(X > t|A^c) \\ &= 1 - F_{X|A^c}(t) \\ &= e^{-3t} \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε την $P(D)$, χρησιμοποιούμε το θεώρημα της ολικής πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A) \cdot P(A) + P(D|A^c) \cdot P(A^c) \\ &= e^{-t} \cdot \frac{1}{2} + e^{-3t} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^{-t} + e^{-3t}}{2} \end{aligned}$$

(β) Έστω C_{1A} το γεγονός ότι η πρώτη λάμπα που χρησιμοποιούμε προέρχεται από την εταιρία Α. Παρατηρούμε ότι το γεγονός C_{1A} είναι ισοδύναμο με το γεγονός A του υποερωτήματος (α). Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes έχουμε ότι:

$$P(C_{1A}|D) = P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{e^{-t} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{e^{-t} + e^{-3t}}{2}} = \frac{e^{-t}}{e^{-t} + e^{-3t}}$$

(γ) Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X|A] \cdot P(A) + \mathbf{E}[X|A^c] \cdot P(A^c) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Και για την διασπορά του έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^2|A] &= \frac{2}{1^2}, \quad \mathbf{E}[X^2|A^c] = \frac{2}{3^2} \\ \mathbf{E}[X^2] &= \mathbf{E}[X^2|A] \cdot P(A) + \mathbf{E}[X^2|A^c] \cdot P(A^c) = \frac{10}{9} \\ \text{var}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Άσκηση 3. Οι τ.μ X, Y είναι από κοινού Γκαουσιανές με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Ισχύει: $E[XY] = 0.5$. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ $X+Y = W$ και $Z = |W|$.

Λύση.

Δεδομένου ότι οι X και Y είναι από κοινού Γκαουσιανές, η $W = X+Y$ είναι επίσης Γκαουσιανή με μέση τιμή:

$$E[W] = E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 0,$$

και διασπορά:

$$\begin{aligned}\text{var}(W) &= E[W^2] - (E[W])^2 = E[(X+Y)^2] - 0 \\ &= E[X^2 + 2XY + Y^2] = E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] = 1 + 2 \times 0.5 + 1 = 3.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-w^2/6}.$$

Δεδομένου ότι $Z = |W|$, έχουμε ότι η Z παίρνει μη αρνητικές τιμές.

Για $z > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(|W| \leq z) = P(-z \leq W \leq z) \\ &= F_W(z) - F_W(-z) = F_W(z) - (1 - F_W(z)) = 2F_W(z) - 1.\end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$f_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z} F_Z(z) = 2f_W(z) \text{ για } z > 0 \text{ και } f_Z(z) = 0 \text{ για } z < 0:$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{6\pi}} e^{-z^2/6} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0. \end{cases}$$

Άσκηση 4. Έστω η τ.μ X είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο $[-1, 2]$. Η X μετασχηματίζεται στην τ.μ $Y = X^2$.

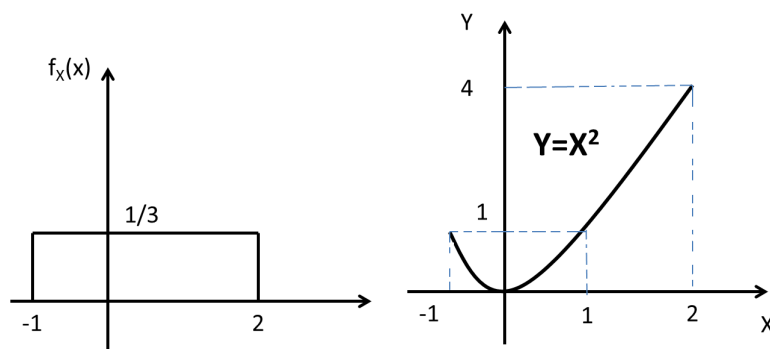
(α) Να δώσετε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού και ορίστε το πεδίο τιμών της Y .

(β) Να βρείτε την Α.Σ.Κ και την σ.π.π. της τ.μ Y , $f_Y(y)$

Λύση

(α)

Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού παριστάνεται στο σχήμα 1, ενώ στο σχήμα παριστάνεται το πεδίο τιμών της ομοιόμορφα κατανομημένης τ.μ X .



Σχήμα 3: (Αριστερά): Γραφική παράσταση της ομοιόμορφα κατανομημένης τ.μ X στο διάστημα $[-1, 2]$. (Δεξιά): Γραφική παράσταση του πεδίου τιμών της τ.μ Y .

(β)

Έχουμε ότι:

- Για $y < 0 \Rightarrow F_Y(y) = 0$
- Για $y \geq 0 \Rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
 - Για $0 \leq \sqrt{y} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \leq 1$ έχουμε:

$$F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{3} dx = \frac{2}{3} \sqrt{y}$$

- Για $0 \leq \sqrt{y} \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{y} \leq -1 \leq x \leq \sqrt{y} \leq 2$

$$F_Y(y) = \int_{-1}^{\sqrt{y}} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{y})$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{3}(1 + \sqrt{y}), & 1 < y \leq 4 \\ 1, & y > 4 \end{cases}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας γίνεται:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}}, & 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{6\sqrt{y}}(1 + \sqrt{y}), & 1 < y \leq 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$