

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217 - Θεωρία Πιθανοτήτων
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Λύσεις Τελικής Εξέτασης - 1 Φεβρουαρίου 2016

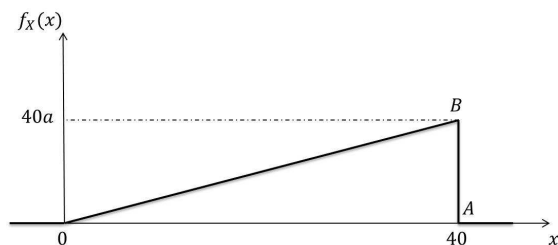
Θέμα 1 - (35 μονάδες)

(α') Από το Σχήμα 1 βλέπουμε ότι η αναλυτική έκφραση της σ.π.π. $f_X(x)$ είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x \leq 40 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε τη θετική σταθερά, α , εφαρμόζουμε τον κανόνα κανονικοποίησης για τη σ.π.π.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} E_{OAB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 \cdot \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{800}.$$



Σχήμα 1: Ερώτημα 1α.

(β')

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^{40} \frac{1}{800} x^2 dx = \frac{x^3}{3 \cdot 800} \Big|_0^{40} = \frac{80}{3} = 26.67.$$

- $F_X(x) = 0$ για $x < 0$ και $F_X(x) = 1$ για $x \geq 40$.
- Για $0 \leq x < 40$, $F_X(x) = \int_0^x \frac{t}{800} dt = \frac{t^2}{2 \cdot 800} \Big|_0^x = \frac{x^2}{1600}.$

Συνεπώς,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{1600}, & 0 \leq x < 40 \\ 1, & x \geq 40 \end{cases}$$

(γ') Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

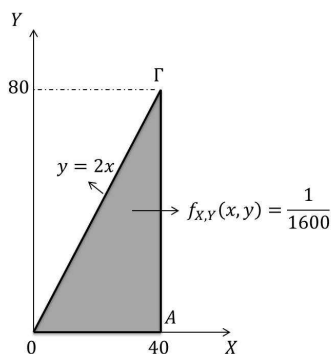
$$f_{Y/X}(y/x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & 0 \leq y \leq 2x \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(δ')

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y/X}(y/x) = \frac{x}{800} \cdot \frac{1}{2x} \text{ όταν } 0 \leq x \leq 40, 0 \leq y \leq 2x$$

$$\therefore f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1600}, & 0 \leq x \leq 40, 0 \leq y \leq 2x \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Από κοινού ομοιόμορφη κατανομή στο χωρίο ΟΑΓ: Σχήμα 2 .



Σχήμα 2: Ερώτημα 1δ.

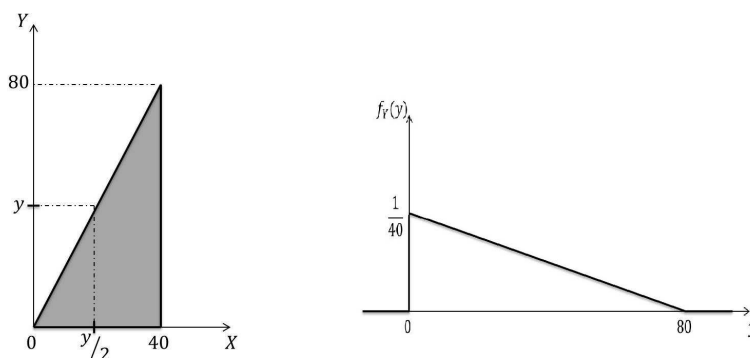
(ε') Το πεδίο τιμών της τ.μ. Y είναι το $[0, 80]$.

Για $0 \leq y \leq 80$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_{\frac{y}{2}}^{40} \frac{1}{1600} dx = \frac{1}{1600} x \Big|_{\frac{y}{2}}^{40} = \frac{1}{1600} (40 - \frac{y}{2}).$$

Επομένως,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{1600} (40 - \frac{y}{2}), & 0 \leq y \leq 80 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Σχήμα 3: Ερώτημα 1ε.

$$E[Y] = \int_0^{80} \frac{1}{1600} (40 - \frac{y}{2}) y dy = \int_0^{80} (\frac{y}{40} - \frac{y^2}{3200}) dy = \frac{y^2}{80} - \frac{y^3}{9600} \Big|_0^{80} = 26.67.$$

Το κέρδος του Παύλου είναι $Z = Y - X$. Επομένως,

$$E[Z] = E[Y] - E[X] = 26.67 - 26.67 = 0.$$

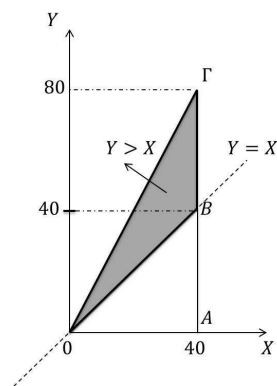
(ς') Από σχήμα 4 :

$$P(Y > X) = 1 - P(Y \leq X) = 1 - \frac{1}{1600} \cdot E_{OAB} = 1 - \frac{1}{1600} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 = \frac{1}{2}.$$

(ζ) Ζητάμε την πιθανότητα :

$$P(30 \leq X \leq 40/Y = 20) = \int_{30}^{40} f_{X/Y}(x/y = 20) dx$$

Απαιτείται η δεσμευμένη σ.π.π. της X δεδομένης της Y .



Σχήμα 4: Ερώτημα 1στ.

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Bayes:

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_X(x) \cdot f_{Y/X}(y/x)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{x}{80} \cdot \frac{1}{1600}}{\frac{1}{1600} \cdot (40 - \frac{y}{2})} = \frac{x}{800 \cdot (40 - \frac{y}{2})}$$

Συνεπώς,

$$f_{X/Y}(x/y = 20) = \frac{x}{30 \cdot 800}.$$

Επομένως,

$$P(30 \leq X \leq 40/Y = 20) = \int_{30}^{40} \frac{x}{30 \cdot 800} dx = \frac{x^2}{60 \cdot 800} \Big|_{30}^{40} = 0.0146.$$

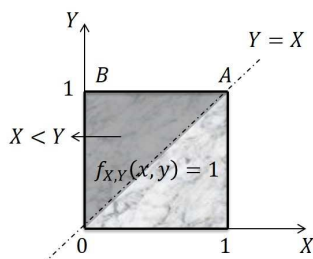
Θέμα 2 - (25 μονάδες)

(α') Καθώς οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \text{ και } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(β') Από σχήμα 5 :

$$P(X < Y) = 1 \cdot E_{OAB} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0.5.$$



Σχήμα 5: Ερώτημα 2β.

(γ')

$$Z = \max(X, Y), \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(\max(X, Y) \leq z) = P(X \leq z \cap Y \leq z) \\ &= P(X \leq z) \cdot P(Y \leq z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = z \cdot z = z^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f_Z(z) &= \frac{dF_Z(z)}{dz} = 2z \\ \Rightarrow f_Z(z) &= \begin{cases} 2z, & 0 < z \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}\end{aligned}$$

$$E[Z] = \int_0^1 2zz \, dz = \frac{2}{3} z^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(δ')

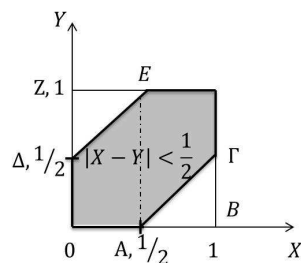
$$W = \min(X, Y), \quad 0 \leq w \leq 1$$

$$\begin{aligned}F_W(w) &= P(W \leq w) = 1 - P(W > w) = 1 - P(\min(X, Y) > w) \\ &= 1 - P(X > w \cap Y > w) = 1 - P(X > w) \cdot P(Y > w) \\ &= 1 - [1 - F_X(w)] \cdot [1 - F_Y(w)] \\ &= 1 - (1 - w) \cdot (1 - w) = 1 - (1 - w)^2 \\ \therefore f_W(w) &= \frac{dF_W(w)}{dw} = 2(1 - w) \\ \therefore f_W(w) &= \begin{cases} 2(1 - w), & 0 \leq w \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}\end{aligned}$$

$$E_W(w) = \int_0^1 2(1 - w)w \, dw = w^2 \Big|_0^1 - \frac{2}{3} w^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(ε') Ζητάμε την πιθανότητα του γεγονότος $|X - Y| \leq \frac{1}{2}$ (30 λεπτά είναι το $\frac{1}{2}$ της ώρας), που απεικονίζεται στο σχήμα 6.

$$\begin{aligned}P(|X - Y| \leq \frac{1}{2}) &= 1 - P(|X - Y| > \frac{1}{2}) \\ &= 1 - 1 \cdot (E_{AB\Gamma} + E_{\Delta EZ}) \\ &= 1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$



Σχήμα 6: Ερώτημα 2ε.

Θέμα 3 - (15 μονάδες)

(α') (i) Έχουμε:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P\left(\frac{X+4}{3} < \frac{10+4}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{14}{3}\right).$$

(ii) Ισχύει:

$$\begin{aligned}P(X^2 < 900) &= P(-30 < X < 30) = P\left(\frac{-30+4}{3} < \frac{X+4}{3} < \frac{30+4}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{34}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-26}{3}\right) = \Phi\left(\frac{34}{3}\right) + \Phi\left(\frac{26}{3}\right) - 1.\end{aligned}$$

(iii) $P(X = -4) = 0$, καθώς η X είναι συνεχής τ.μ.

(β') Η τ.μ. Z είναι Γκαουσιανή ως γραμμικός συνδυασμός Γκαουσιανών. Έχουμε ότι:

$$E[Z] = E[X] - 3E[Y] = 0 - 3 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2 &= E[Z^2] - (E[Z])^2 = E[Z^2] = E[(X - 3Y)^2] \\ &= E[X^2 - 6XY + 9Y^2] = E[X^2] - 6E[XY] + 9E[Y^2] \\ &= \sigma_X^2 + \mu_X^2 - 6(\text{cov}(X, Y) + \mu_X\mu_Y) + 9(\sigma_Y^2 + \mu_Y^2) \\ &= 12 + 0 - 6(-1 + 0 \cdot 0) + 9(7 + 0) = 81\end{aligned}$$

$$\therefore Z \sim N(0, 81)$$

$$P(Z < 5) = P\left(\frac{Z - 0}{9} < \frac{5 - 0}{9}\right) = \Phi\left(\frac{5}{9}\right).$$

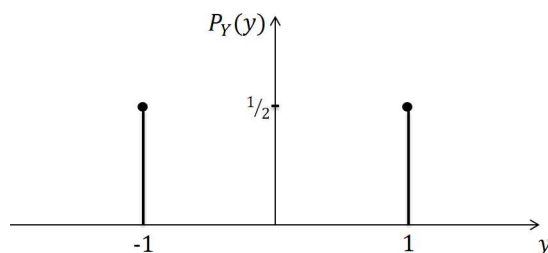
Θέμα 4 - (25 μονάδες)

(α') Η τ.μ. Y είναι διακριτή που παίρνει δύο τιμές: ± 1 .

$$P_Y(1) = P(Y = 1) = P(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

$$P_Y(-1) = P(Y = -1) = P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2}(2 - 1) = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y = \pm 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Σχήμα 7: Ερώτημα 4α.

(β') Η τ.μ. Z είναι συνεχής με πεδίο τιμών το διάστημα $[-1, 1]$.

- Για $0 \leq z < 1$:

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) \\ &= 1 - P\left(\frac{z}{2} \leq X \leq \frac{2-z}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2-z}{2} - \frac{z}{2}\right) = \frac{1+z}{2}\end{aligned}$$

- Για $-1 \leq z < 0$:

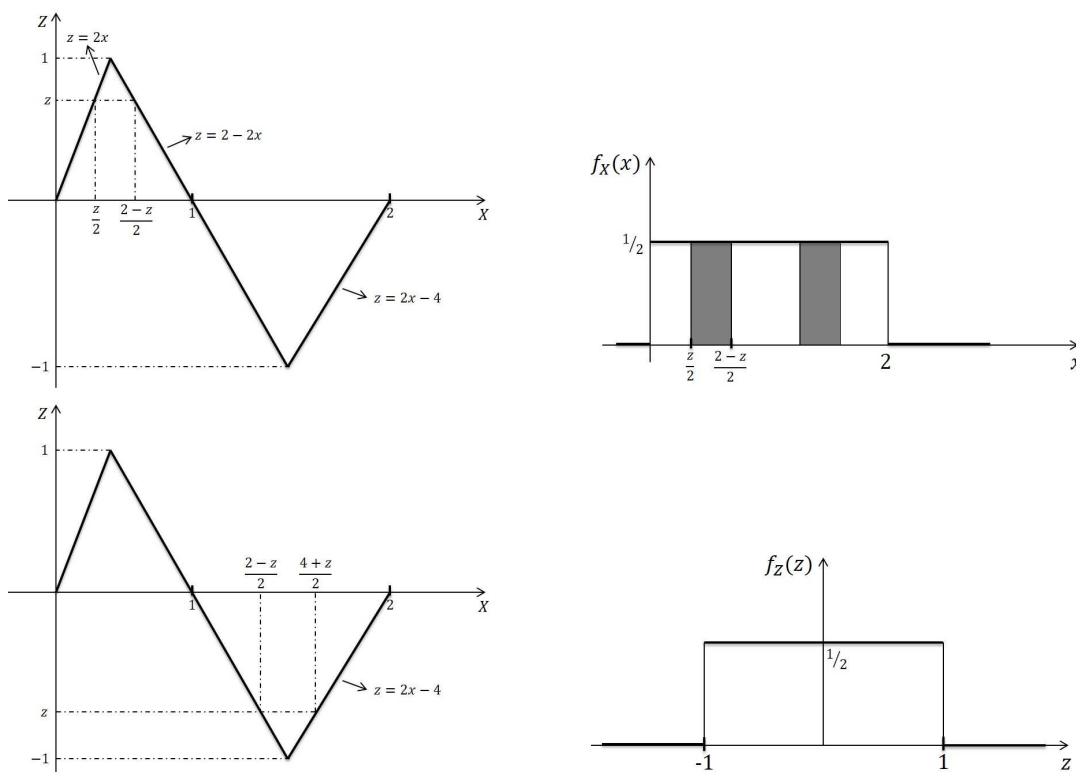
$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P\left(\frac{2-z}{2} \leq X \leq \frac{4+z}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4+z}{2} - \frac{2-z}{2}\right) = \frac{1+z}{2}\end{aligned}$$

Επομένως,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < -1 \\ \frac{1+z}{2}, & -1 \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

$$\therefore f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |z| \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Δηλαδή, η τ.μ. Z είναι ομοιόμορφη με πεδίο τιμών το $[-1, 1]$.



Σχήμα 8: Ερώτημα 46.

(γ') Βλέπουμε ότι όταν $Z > 0$, η τ.μ. X παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως $Y = +1$ με βεβαιότητα. Επομένως,

$$P(Y > 0 / Z > 0) = 1.$$

Με άλλα λόγια:

$$P(Y > 0 / Z > 0) = \frac{P(Y > 0 \cap Z > 0)}{P(Z > 0)} = \frac{P(0 \leq X \leq 1 \cap 0 \leq X \leq 1)}{P(0 \leq X \leq 1)} = 1.$$