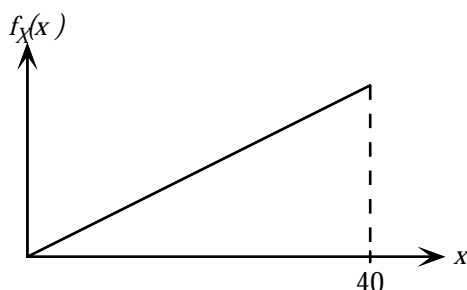


Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
1 Φεβρουαρίου 2016 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 35 μονάδες. Ο Παύλος κάνει διακοπές στο Monte Carlo. Κάθε βράδυ μπαίνει στο καζίνο με X ευρώ στην τσέπη, όπου η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.), $f_X(x)$, που φαίνεται στο Σχήμα 1. Το ποσό Y που έχει στην τσέπη του όταν φεύγει από το καζίνο τις πρωινές ώρες ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με τιμές μεταξύ 0 και 2 φορές το ποσό με το οποίο μπήκε στο καζίνο.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση για τη σ.π.π. της τ.μ. X του θέματος 1.

- (α) (4 μονάδες) Δώστε την αναλυτική έκφραση για την σ.π.π., $f_X(x)$, της τ.μ. X .
- (β) (4 μονάδες) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[X]$, και την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της τ.μ. X .
- (γ) (4 μονάδες) Ερμηνεύοντας την δεύτερη πρόταση της εκφώνησης, δώστε την αναλυτική έκφραση για τη δεσμευμένη σ.π.π., $f_{Y|X}(y|x)$, της Y δεδομένης της X .
- (δ) (5 μονάδες) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. των X και Y . Τι κατανομή ακολουθούν από κοινού οι X και Y ;
- (ε) (5 μονάδες) Υπολογίστε την σ.π.π. της τ.μ. Y καθώς και την μέση τιμή της Y . Ποιο είναι το μέσο κέρδος του Παύλου στο τέλος των διακοπών του;
- (στ) (6 μονάδες) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι κάποιο τυχαίο βράδυ ο Παύλος θα φύγει κερδισμένος από το καζίνο.
- (ζ) (7 μονάδες) Δεδομένου ότι κάποιο βράδυ ο Παύλος έφυγε με 20 ευρώ από το καζίνο, με ποια πιθανότητα είχε στην τσέπη του μεταξύ 30 και 40 ευρώ όταν έμπαινε στο καζίνο εκείνο το βράδυ;

Θέμα 2 - 25 μονάδες. Η Κατερίνα και ο Ανδρέας έχουν ραντεβού στο αγαπημένο τους εστιατόριο. Καθένας φτάνει στο σημείο συνάντησης κάποια στιγμή μεταξύ 8 και 9, ανεξάρτητα από τον άλλο. Ο χρόνος άφιξης της Κατερίνας είναι η τ.μ. X ενώ ο χρόνος άφιξης του Ανδρέα είναι η τ.μ. Y . Οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ., ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα της μίας ώρας: $X \sim U[0, 1]$ και $Y \sim U[0, 1]$.

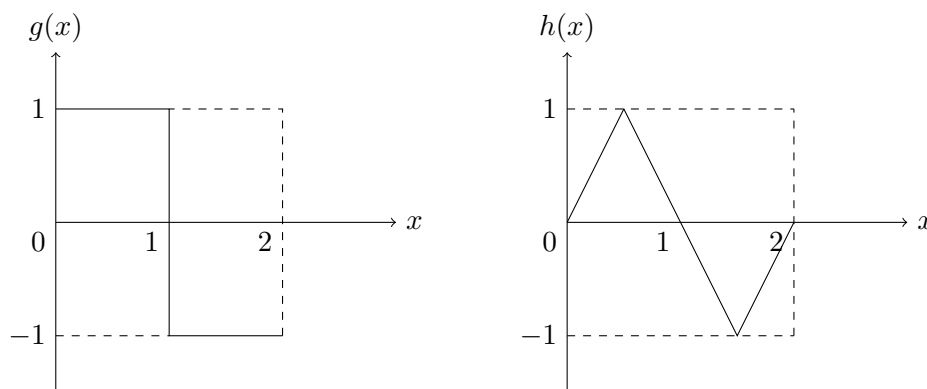
- (α) (4 μονάδες) Δώστε την αναλυτική έκφραση καθώς και την γραφική παράσταση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y .
- (β) (5 μονάδες) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η Κατερίνα φτάνει πρώτη στο ραντεβού.
- (γ) (5 μονάδες) Έστω Z ο χρόνος άφιξης του πιο αργοπορημένου. Υπολογίστε τη σ.π.π., $f_Z(z)$, και τη μέση τιμή, $E[Z]$, της Z .
- (δ) (5 μονάδες) Έστω W ο χρόνος άφιξης του πρώτου. Υπολογίστε τη σ.π.π., $f_W(w)$, και τη μέση τιμή, $E[W]$, της W .
- (ε) (6 μονάδες) Η δύο φίλοι αποφασίζουν ότι θα περιμένουν ο ένας τον άλλο το πολύ 30 λεπτά, δηλαδή όποιος φτάσει πρώτος θα φύγει αν ο άλλος δεν εμφανιστεί μέσα σε 30 λεπτά. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι οι δύο φίλοι θα φάνε μαζί.

Θέμα 3 - 15 μονάδες. Κανονική Κατανομή.

(α) (7 μονάδες) Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = -4$ και διασπορά $\sigma^2 = 9$: $X \sim N(-4, 9)$. Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$: (i) $P(X \geq 10)$, (ii) $P(X^2 < 900)$, (iii) $P(X = -4)$.

(β) (8 μονάδες) Οι τ.μ. X και Y είναι από κοινού Γκαουσιανές με μέσες τιμές $\mu_X = \mu_Y = 0$, διασπορές $\sigma_X^2 = 12$, $\sigma_Y^2 = 7$, και συνδιασπορά $\text{cov}(X, Y) = -1$. Ορίζουμε τη νέα Γκαουσιανή τ.μ. $Z = X - 3Y$. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Z < 5)$.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Έστω X συνεχής τ.μ. ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα τιμών $[0, 2]$.



Σχήμα 2: Οι δύο μετασχηματισμοί της τ.μ. X του θέματος 4.

(α) (7 μονάδες) Ορίζουμε την τ.μ. $Y = g(X)$, όπου η συνάρτηση $g(X)$ είναι ο λεγόμενος “τετραγωνικός παλμός” που φαίνεται στο Σχήμα 2. Είναι η τ.μ. Y διακριτή ή συνεχής; Να υπολογίσετε και να δώσετε τη γραφική παράσταση της κατανομής της.

(β) (10 μονάδες) Ορίζουμε την τ.μ. $Z = h(X)$, όπου η συνάρτηση $h(X)$ είναι ο λεγόμενος “τριγωνικός παλμός” που φαίνεται στο Σχήμα 2. Είναι η τ.μ. Z διακριτή ή συνεχής; Να υπολογίσετε και να δώσετε τη γραφική παράσταση της κατανομής της. Βοήθεια: Υπολογίστε πρώτα την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Z(z)$, της Z .

(γ) (8 μονάδες) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y > 0 | Z > 0)$.