

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2015

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις 6ης Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α) Η περιθωριακή σ.π.π. της $f_{X,Y}$ για την τ.μ X γίνεται:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 12xy(1-x)dy = 12x(1-x) \int_0^1 ydy \\ &= 12x(1-x) \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{12x}{2}(1-x) = 6x(1-x) \end{aligned}$$

Η περιθωριακή σ.π.π. της $f_{X,Y}$ για την τ.μ Y θα είναι:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^1 12xy(1-x)dx = 12y \int_0^1 x \cdot (1-x)dx \\ &= 12 \cdot y \int_0^1 x - x^2 dx = 12 \cdot y \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 12 \cdot y \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 12 \cdot y \cdot \frac{1}{6} = 2y \end{aligned}$$

(β) Για να είναι οι τ.μ X, Y ανεξάρτητες θα πρέπει να ισχύει:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \forall x,y \in (0,1)$$

Έχουμε ότι:

$$f_X(x)f_Y(y) = 6x(1-x) \cdot 2y = 12xy(1-x) = f_{X,Y}, \forall x,y \in (0,1)$$

Επομένως, οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(γ) (i) Η μέση τιμή της τ.μ X γίνεται:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)dx = 6 \int_0^1 x^2(1-x)dx \\ &= 6 \int_0^1 x^2 - x^3 dx = 6 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Για την μέση τιμή της τ.μ Y έχουμε:

$$E[Y] = \int_0^1 y f_Y(y)dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3} \left[y^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

(ii) Η διασπορά της τ.μ X γίνεται :

$$\text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Υπολογίζουμε τη ροπή δεύτερης τάξης $E[X^2]$ ως εξής :

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^1 x^2 \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x) dx = 6 \cdot \int_0^1 x^3(1-x) dx = 6 \cdot \int_0^1 x^3 - x^4 dx \\ &= 6 \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 6 \cdot \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right] = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε :

$$\text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}$$

Αντίστοιχα, η διασπορά της τ.μ Y γίνεται :

$$\begin{aligned} \text{var}[Y] &= E[Y^2] - (E[Y])^2 = \int_0^1 y^2 \cdot f_Y(y) dy - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \int_0^1 y^2 \cdot 2y dy - \frac{4}{9} \\ &= \int_0^1 2y^3 dy - \frac{4}{9} = \left[\frac{2y^4}{4} \right]_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{2}{4} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

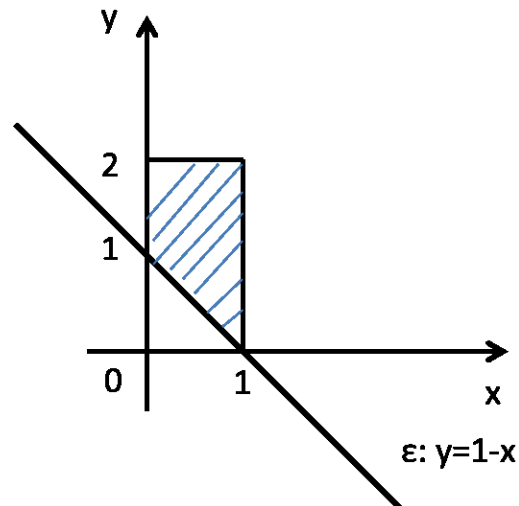
(δ) Στο (β) ερώτημα δείξαμε ότι οι τ.μ X, Y είναι ανεξάρτητες. Επομένως, η συνδιασπορά τους θα είναι ίση με μηδέν, $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Άσκηση 2.

(α) Για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X, Y ισχύει :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx &= 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \int_0^2 \left(c \cdot x^2 + \frac{xy}{3} \right) dy dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 \left[c \cdot x^2 \cdot y + \frac{x}{3} \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 \left(c \cdot 2x^2 + \frac{x}{3} \cdot \frac{4}{2} \right) dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 c \cdot 2x^2 + \frac{2x}{3} dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \left[2c \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2c}{3} + \frac{1}{3} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2c + 1 = 3 \\ &\Leftrightarrow c = 1 \end{aligned}$$

(β) Για να βρούμε τη ζητούμενη πιθανότητα θεωρούμε την ευθεία : $\epsilon : x + y = 1$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Σχήμα 1: Η ζητούμενη πιθανότητα: $P(X + Y \geq 1)$

Επομένως, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 P(X + Y \geq 1) &= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=2} \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{3 \cdot 2} \right]_{1-x}^2 dx \\
 &= \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{4 \cdot x}{2 \cdot 3} - x^2(1-x) - \frac{x(1-x)^2}{6} \right) dx \\
 &= \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{2}{3} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x(1-2x+x^2)}{6} dx \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \int_0^1 \frac{x - 2x^2 + x^3}{6} dx = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{11}{12} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} = \frac{65}{72}
 \end{aligned}$$

(γ) Οι περιθωριακές σ.π.π της $f_{X,Y}$ είναι:

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y} dy = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dy \\
 &= x^2 \cdot y + \left[\frac{xy^2}{2 \cdot 3} \right]_0^2 = 2 \cdot x^2 + \frac{4c \cdot x}{2 \cdot 3} = 2x^2 + \frac{2}{3}x, \quad \forall x \in [0, 1]
 \end{aligned}$$

Επομένως, η περιθωριακή σ.π.π της τ.μ. X γίνεται:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2}{3}x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{y}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{y}{6} = \frac{2+y}{6}, \quad \forall y \in [0, 2]
 \end{aligned}$$

Επομένως, η περιθωριακή σ.π.π της τ.μ. Y γίνεται:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2+y}{6}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(δ) Για να είναι οι τ.μ X, Y ανεξάρτητες θα πρέπει να ισχύει:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \forall x \in [0, 1], \quad y \in [0, 2]$$

Χρησιμοποιώντας ένα αντιπαράδειγμα, παρατηρούμε ότι οι τ.μ X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

$$f(0.2, 0.3) \neq f_X(0.2)f_Y(0.3)$$

(ε) Υπολογίζουμε τη ζητούμενη μέση τιμή ως εξής:

$$\begin{aligned} E[e^x \cos y] &= \int_0^1 \int_0^2 (e^x \cos y) f_{X,Y}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^2 (e^x \cos y) (x^2 + \frac{xy}{3}) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[e^x \cdot \int_0^2 \cos y \cdot (x^2 + \frac{xy}{3}) dy \right] dx = \int_0^1 \left[e^x \int_0^2 (x^2 \cos y + \frac{x}{3} \cdot y \cdot \cos y) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 e^x \left[x^2 \cdot \sin y + \frac{x}{3} \cdot (y \cdot \sin y + \cos y) \right]_0^2 dx = \int_0^1 e^x \left(x^2 \sin 2 + \frac{x}{3} \cdot (2 \cdot \sin 2 + \cos 2) - \frac{x}{3} \right) dx \\ &= \sin 2 \int_0^1 x^2 \cdot e^x dx + \frac{2 \cdot \sin 2 + \cos 2}{3} \cdot \int_0^1 x \cdot e^x dx - \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 x \cdot e^x dx \\ &= \sin 2 \cdot \left(e^x \cdot x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 2 \cdot x \cdot e^x dx \right) + \left(\frac{2 \cdot \sin 2 + \cos 2}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) \\ &= \sin 2 \cdot \left(e - 2 \int_0^1 x \cdot e^x dx \right) + \left(\frac{2 \cdot \sin 2 + \cos 2}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(e - e^x \Big|_0^1 \right) \\ &= \sin 2 \cdot \left[e - 2 \cdot \left(e - e^x \Big|_0^1 \right) \right] + \left(\frac{2 \cdot \sin 2 + \cos 2}{3} - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(e - e^x \Big|_0^1 \right) \\ &= \sin 2 \cdot (e - 2) + \frac{2 \cdot \sin 2 + \cos 2}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot e \cdot \sin 2 - 4 \sin 2 + \cos 2 - 1) \approx 0.78 \end{aligned}$$

(στ) Για τη συνδιασπορά των τ.μ X, Y έχουμε:

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τις ποσότητες

$$\begin{aligned} E[X \cdot Y] &= \int_0^1 \int_0^2 x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^2 x \cdot y \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dy dx = \int_0^1 x \cdot \int_0^2 \left(x^2 \cdot y + \frac{x}{3} \cdot y^2 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x \cdot \left[x^2 \frac{y^2}{2} + \frac{x}{3} \frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx = \int_0^1 x \cdot \left(x^2 \frac{4}{2} + \frac{x}{3} \cdot \frac{8}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 2x^3 + \frac{8x^2}{9} dx = \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{8}{9} \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{43}{54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 \int_0^2 x \cdot f_{X,Y}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^2 x \cdot \left(x^2 + \frac{x \cdot y}{3} \right) dy dx = \int_0^1 x \cdot \int_0^2 \left(x^2 + \frac{x \cdot y}{3} \right) dy dx \\ &= \int_0^1 x \cdot \left[x^2 \cdot y + \frac{x}{3} \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx = \int_0^1 x \cdot \left(2 \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{x}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 2 \cdot x^3 + 2 \cdot \frac{x^2}{3} dx = \left[2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_0^1 \int_0^2 y \cdot f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^2 y \cdot (x^2 + \frac{x \cdot y}{3}) dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^2 x^2 \cdot y + \frac{x}{3} \cdot y^2 dy dx = \int_0^1 \left[x^2 \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{x}{3} \frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx \\
&= \int_0^1 2 \cdot x^2 + \frac{8}{3} \cdot \frac{x}{3} dx = \left[2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{8}{9} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9}
\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\text{cov}(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] = \frac{43}{54} - \frac{13}{18} \cdot \frac{10}{9} \approx -0.002$$

Άσκηση 3.

Γνωρίζουμε ότι οι τ.μ X, Y είναι ανεξάρτητες, οπότε θα ισχύει:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$\begin{aligned}
P[X > Y] &= \int_0^{+\infty} \int_y^{+\infty} \frac{1}{3} e^{-x/3} \cdot \frac{1}{2} e^{-y/2} dx dy = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2} e^{-y/2} \int_y^{+\infty} \frac{1}{3} e^{-x/3} dx \right] dy \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-y/2} \cdot e^{-y/3} dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y/2} \cdot e^{-y/3} dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(y/2+y/3)} dy \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1/2 + 1/3} = \frac{1}{1 + 2/3} = 3/5
\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι οι τ.μ X, Y ακολουθούν εκθετική κατανομή με παραμέτρους, $\lambda_X = 1/3$, και $\lambda_Y = 1/2$, αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τους τύπους που γνωρίζουμε για την μέση τιμή της εκθετικής κατανομής, βρίσκουμε ότι:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda_X} = \frac{1}{1/3} = 3$$

και:

$$E[Y] = \frac{1}{\lambda_Y} = \frac{1}{1/2} = 2$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι οι τ.μ X, Y είναι ανεξάρτητες, οπότε για την συσχέτισή τους ισχύει:

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y] = 3 \cdot 2 = 6$$

(γ) Η συνδιασπορά των τ.μ X, Y θα είναι μηδέν, διότι οι τ.μ X, Y είναι ανεξάρτητες.

$$\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 6 - 6 = 0$$

Άσκηση 4.

Θα υπολογίσουμε πρώτα την α.σ.κ της τ.μ. Z και έπειτα θα την παραγωγίσουμε για να βρούμε την σ.π.π. Ορίζουμε $a = \frac{X_1}{X_2}$ και έχουμε,

$$\begin{aligned} F_Z(a) &= P\left(\frac{X_1}{X_2} \leq a\right) \\ &= P(X_1 \leq aX_2) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{ax_2} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2} dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^\infty \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \left[-\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 x_1} \right]_0^{ax_2} dx_2 \\ &= \lambda_2 \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x_2} (1 - e^{-\lambda_1 a x_2}) dx_2 \\ &= \lambda_2 \int_0^\infty (e^{-\lambda_2 x_2} - e^{-x_2(\lambda_2 + \lambda_1 a)}) dx_2 \\ &= \lambda_2 \left[\frac{1}{\lambda_2 + \lambda_1 a} e^{-x_2(\lambda_2 + \lambda_1 a)} - e^{-\lambda_2 x_2} \right]_0^\infty \\ &= -\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 a} - 1 \right] \\ &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 a} \\ &= \frac{\lambda_1 a}{\lambda_2 + \lambda_1 a} \end{aligned}$$

Για να βρεθεί η σ.π.π. $f_Z(a)$ παραγωγίζουμε την $F_Z(a)$. Επομένως,

$$f_Z(a) = F'_Z(a) = \frac{dF}{da} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 a + \lambda_2)^2}$$

Τέλος, η $P(X_1 < X_2)$ ισούται με

$$P(X_1 < X_2) = P\left(\frac{X_1}{X_2} < 1\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}$$

Άσκηση 5.

Για $x < 0$, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι 0, και για $x > 2$ είναι 1. Για τιμές του x μεταξύ 0 και 2, μπορούμε να βρούμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X \leq x, H) + P(X \leq x, T) \\ &= 1/2(P(X \leq x|H) + P(X \leq x|T)) \\ &= 1/2(P(U \leq x-1) + P(U \geq x-1)) \\ &= \begin{cases} 1/2(1 - (1-x)) & , 0 \leq x \leq 1, \\ 1/2(x-1) & , 1 < x \leq 2 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \text{ για } 0 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Οπότε, $X \sim U[0, 2]$, δηλαδή η X κατανέμεται ομοιόμορφα μεταξύ 0 και 2.

Άσκηση 6. Έστω X και Y οι αποστάσεις των βολών του Κώστα και της Μαρίας, αντίστοιχα. Οι βολές είναι ανεξάρτητες, οπότε η κοινή τους συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα ισούται με:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{100} \frac{1}{60} e^{-\frac{y}{60}}, & 0 \leq X \leq 100, Y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θα έχουμε:

(α)

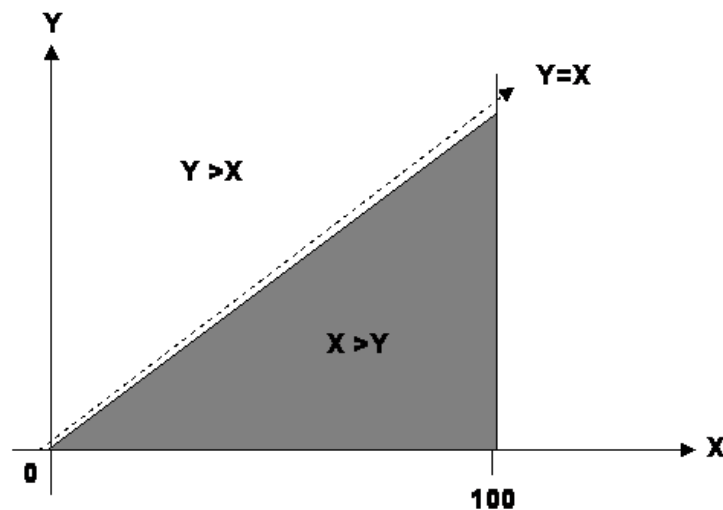
$$P(X = 75) = \int_{75}^{75} \frac{1}{100} dx = 0$$

(β)

$$P(Y > 100) = \int_{100}^{\infty} \frac{1}{60} e^{-\frac{y}{60}} dy = e^{-\frac{100}{60}} \approx 0,1889$$

(γ) Είναι: $E[X] = 50, E[Y] = 60$.

(δ) Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα $P(X > Y)$ και να την συγκρίνουμε με την πιθανότητα $P(X < Y)$. Για να το κάνουμε αυτό, εξετάζουμε το κοινό δειγματικό χώρο του σχήματος 2.



Σχήμα 2: Η πιθανότητα $P(X > Y)$

Επομένως, θα έχουμε:

$$P(X > Y) = \int_0^{100} \int_0^x f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_0^{100} \int_0^x \frac{1}{100} \frac{1}{60} e^{-\frac{y}{60}} dy dx \approx 0,5133$$

Παρομοίως βρίσκουμε ότι: $P(Y > X) = 1 - P(X > Y) \approx 0,4867$. Απλώς κοιτάζοντας τις αναμενόμενες τιμές των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, θα έλεγε κανείς ότι είναι πιο πιθανό η Μαρία να ρίξει πιο μακριά. Όμως, τελικά βρήκαμε ότι η πιθανότητα ότι ο Κώστας θα ρίξει παραπάνω είναι ελαφρώς υψηλότερη.

(ε) Είναι: $f_{Y|X}(y/75) = f_Y(y)$ διότι οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες.

(στ) Έστω $W = Y - X$. Πρώτα, βρίσκουμε τη κοινή συνάρτηση κατανομής της W :

$$F_W(w) = P(W \leq w) = P(Y - X \leq w) = P(Y \leq X + w)$$

Το γεγονός φαίνεται στο σχήμα 3.

Για $-100 \leq W \leq 0$ έχουμε:

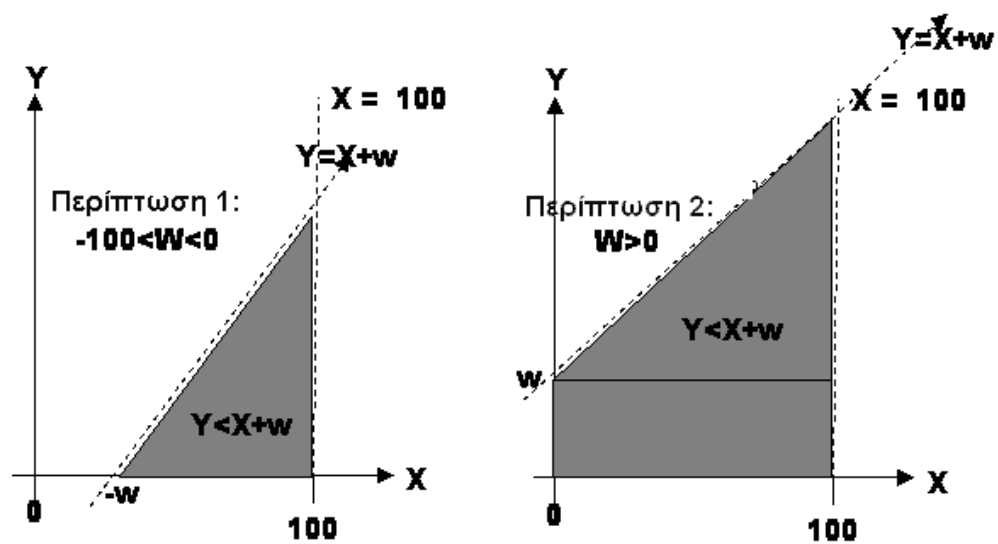
$$\begin{aligned} F_W(w) &= \int_{-w}^{100} \int_0^{x+w} f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_{-w}^{100} \int_0^{x+w} \frac{1}{100} \frac{1}{60} e^{-\frac{y}{60}} dy dx \\ &= \frac{1}{100} (60 e^{-\frac{1}{60}(w+100)} + w + 40) \end{aligned}$$

Για $W \geq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \int_0^{100} \int_0^{x+w} f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_0^{100} \int_0^{x+w} \frac{1}{100} \frac{1}{60} e^{-\frac{y}{60}} dy dx \\ &= \frac{3}{5} e^{-\frac{w}{60}} (e^{-\frac{5}{3}} - 1) + 1 \end{aligned}$$

Εν τέλει, διαφορίζοντας τις προηγούμενες εξισώσεις παίρνουμε ότι:

$$f_W(w) = \frac{d}{dw} F_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{100} (1 - e^{-\frac{1}{60}(w+100)}), & -100 \leq w \leq 0 \\ \frac{1}{100} e^{-\frac{w}{60}} (1 - e^{-\frac{5}{3}}), & w \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Σχήμα 3: 2 περιπτώσεις για τις τιμές της $F_W(w)$