

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2015

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

6η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1.

Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x), & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Να βρεθούν οι περιθωριακές συνάρτησεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y .

(β) Να εξετάσετε αν οι X και Y ανεξάρτητες τ.μ.

(γ) Να βρεθούν:

(i) Η μέση τιμή των τ.μ X και Y , $E[X]$ και $E[Y]$ αντίστοιχα.

(ii) Η διασπορά των τ.μ X και Y , $var[X]$ και $var[Y]$.

(δ) Ποια είναι η συνδιασπορά των τ.μ. X και Y , $cov(X, Y)$;

Άσκηση 2.

Θεωρούμε τις τ.μ X και Y με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot x^2 + \frac{x \cdot y}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c .

(β) Να υπολογισθεί η πιθανότητα: $P(X + Y \geq 1)$

(γ) Να βρεθούν οι περιθωριακές συνάρτησεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y .

(δ) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες τ.μ ;

(ε) Να υπολογισθεί: $E[e^X \cdot \cos Y]$

(ε) Να υπολογισθεί η συνδιασπορά, $cov(X, Y)$ των τ.μ X και Y .

Άσκηση 3.

Δίνονται οι ανεξάρτητες τ.μ. X και Y με σ.π.π:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x/3}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογισθούν τα παρακάτω:

(α) Η πιθανότητα: $P[X > Y]$

(β) Η συσχέτιση των τ.μ X, Y , $E[X \cdot Y]$

(γ) Η συνδιασπορά: $cov(X, Y)$ των τ.μ X και Y .

Άσκηση 4.

Δίνονται οι ανεξάρτητες εκθετικές τ.μ. X_1 και X_2 με παραμέτρους λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να υπολογισθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Z = \frac{X_1}{X_2}$ καθώς και η πιθανότητα $P(X_1 < X_2)$.

Δίνεται ότι $f_{XY}(x, y) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2}$

Άσκηση 5. Η Μαρία μπαίνει σε ένα καζίνο με μία μονάδα κεφαλαίου στην τσέπη της. Κοιτάζει το ρολόι της για να παράξει ένα τυχαίο αριθμό ομοιόμορφα κατανεμημένο μεταξύ 0 και 1 ($U \sim \text{Uniform}[0, 1]$), και κατόπιν ποντάρει το ποσό U στο ριζίμο ενός δίκαιου κέρματος. Επομένως, μετά τη ρίψη του κέρματος το κεφάλαιο της, X , είναι:

$$X = \begin{cases} 1 + U & \text{με πιθανότητα } 0.5 \\ 1 - U & \text{με πιθανότητα } 0.5. \end{cases}$$

Βρείτε την α.σ.κ. και την σ.π.π. της τ.μ. X .

Άσκηση 6. Ο Κώστας και η Μαρία συναγωνίζονται ποιος από τους δύο θα ρίξει πιο μακριά το φρίσμπι. Η απόσταση X (σε μέτρα) που το ρίχνει ο Κώστας ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 100]$, ενώ η απόσταση Y που το ρίχνει η Μαρία ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1/60$.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Κώστας θα ρίξει το φρίσμπι στα 75 μέτρα;
- (β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Μαρία θα το ρίξει σε απόσταση μεγαλύτερη των 100 μέτρων;
- (γ) Ποιες είναι οι μέσες αποστάσεις που το ρίχνουν ο Κώστας και η Μαρία;
- (δ) Ποιος από τους δύο φίλους είναι πιο πιθανό να ρίξει πιο μακριά το φρίσμπι; Βοήθεια: Βρείτε την από κοινού ς.π.π. των X και Y . Κατόπιν, αρκεί να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X > Y)$.
- (ε) Δεδομένου ότι ο Κώστας στέλνει το φρίσμπι στα 75 μέτρα, ποια είναι η δεσμευμένη ς.π.π. της απόστασης ρίψης της Μαρίας;
- (στ) Έστω $W = Y - X$ η επιπλέον απόσταση που στέλνει το φρίσμπι η Μαρία σε σχέση με τον Κώστα. Βρείτε τη ς.π.π. της W .