

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α) Εφόσον η $f_X(x)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

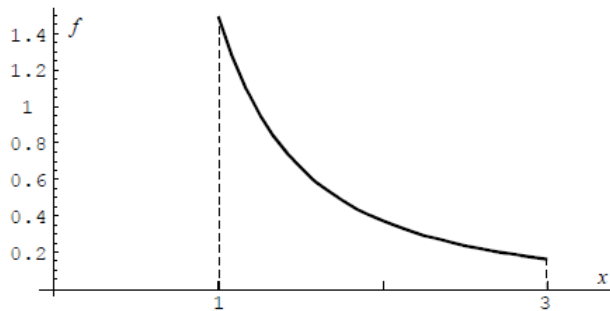
Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^3 \frac{c}{x^2} dx + \int_3^{\infty} 0 dx \\&= c \int_1^3 x^{-2} dx = c \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^3 \\&= c \left(\frac{3^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1} \right) = c \left(1 - \frac{1}{3} \right) \\&= \frac{2c}{3} = 1 \\&\Rightarrow c = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Άρα

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2x^2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το γράφημα της σ.π.π φαίνεται παρακάτω:

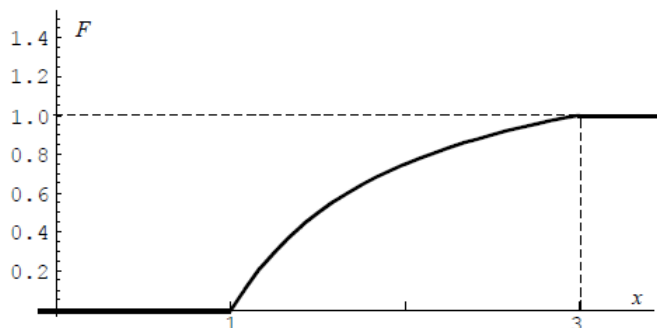


Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της σ.π.π για το υποερώτημα 1(α).

(β) Η α.σ.κ θα είναι ίση με

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt, & x < 1 \\ \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x \frac{3}{2t^2} dt = 0 + \frac{3}{2} \int_1^x t^{-2} dt = \frac{3}{2} [-t^{-1}]_1^x = \frac{3(x-1)}{2x}, & 1 \leq x \leq 3 \\ \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^3 \frac{3}{2t^2} dt + \int_3^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1, & x > 3 \end{cases}$$

Το γράφημα της α.σ.κ φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της α.σ.κ για το υποερώτημα 1(β).

(γ') Θα ισχύει ότι

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{3(2-1)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

(δ') Αφού η σ.π.π είναι μια συνεχής συνάρτηση, η πιθανότητα η τ.μ. X να πάρει μία συγκεκριμένη τιμή είναι 0.

(ε') Μας ζητείται το εμβαδόν όλης της περιοχής κάτω από την καμπύλη $f_X(x)$. Γνωρίζουμε από θεωρία ότι η ζητούμενη τιμή ισούται με 1.

Άσκηση 2.

(α') $P(X < 9:00) = P(X \leq 9:00) = F_X(9:00) = \frac{9:00-8:45}{9:15-8:45} = 0.5$.

(β') $P(X = 9:05) = 0$.

(γ') $P(9:00 \leq X \leq 9:05) = F_X(9:05) - F_X(9:00) = \frac{9:05-8:45}{9:15-8:45} - \frac{9:00-8:45}{9:15-8:45} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$.

(δ') $P(X \geq 9:05) = 1 - P(X < 9:05) = 1 - F_X(9:05) = 1 - \frac{9:05-8:45}{9:15-8:45} = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Άσκηση 3.

(α') Προφανώς, θα πρέπει $c > 0$ (ώστε $f_X(x) \geq 0 \forall x$). Επίσης,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 &\Rightarrow \int_0^1 c(x^2 - x^3) dx = 1 \Rightarrow \\ \left[c \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \right]_0^1 = 1 &\Rightarrow c \frac{1}{12} = 1 \Rightarrow c = 12 \end{aligned}$$

(β') Έχουμε

$$E[X] = \int_0^1 x^2 12(x^2 - x^3) = \left[12 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \right]_0^1 = \frac{5}{3}.$$

(γ') Ισχύει

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 12(x^2 - x^3) = \left[12 \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right) \right]_0^1 = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{1}{25}.$$

(δ')

$$\int_0^m 12(x^2 - x^3) = 0.5 \Rightarrow \left[12 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \right]_0^m = 0.5$$

$$12 \left(\frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} \right) = 0.5 \Rightarrow 4m^3 - 3m^4 = 0.5 \Rightarrow 6m^4 - 8m^3 + 1 = 0.$$

Άσκηση 4.

Η α.σ.κ θα είναι

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Για τη σ.π.π θα ισχύει ότι

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} (1 - e^{-\lambda x}) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

ενώ $f_X(x) = 0$ για $x < 0$.

Τέλος, επιθυμούμε να καθορίσουμε το χρόνο εγγύησης x , ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &\leq 0.01 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} \leq 0.01 \\ &\Leftrightarrow e^{-\lambda x} \geq 1 - 0.01 \\ &\Leftrightarrow -\lambda x \geq \ln(0.99) \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{\lambda} \ln(0.99) \end{aligned}$$

Άρα τελικά για να επιστρέφονται στο εργοστάσιο το πολύ 1% των λυχνιών, θα πρέπει να δοθούν ως εγγύηση

$$c = -\frac{1}{0.1} \ln(0.99) = 10 \cdot 0.0100503 = 0.100503 \approx 100 \text{ ώρες}.$$

Άσκηση 5.

(α') Έχουμε

$$P(X > \frac{1}{2}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{2}) = 1 - F_X(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

(β') Αν θέλουμε να είμαστε πολύ τυπικοί μπορούμε να γράψουμε:

$$P(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{3}{4}) = P(-\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4}) + P(X = -\frac{1}{2}) - P(X = \frac{3}{4}).$$

Αφού η $\alpha.σ.κ$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, η πιθανότητα η τ.μ. X να πάρει μία συγκεκριμένη τιμή είναι 0. Άρα έχουμε $P(X = \frac{3}{4}) = 0$ και $P(X = -\frac{1}{2}) = 0$. Έτσι έχουμε τελικά,

$$P(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{3}{4}) = P(-\frac{1}{2}X \leq \frac{3}{4}) = F_X(\frac{3}{4}) - F_X(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}.$$

(γ') Έχουμε

$$P(|X| \leq \frac{1}{2}) = P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = P(X \leq \frac{1}{2}) - P(X < -\frac{1}{2}).$$

Παρατηρήστε ότι $P(X \leq \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

Αφού η πιθανότητα $P(X = -\frac{1}{2}) = 0$, θα ισχύει ότι $P(X < -\frac{1}{2}) = P(X \leq -\frac{1}{2})$.

Έτσι, $P(X < -\frac{1}{2}) = F_X(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ και

$$P(|X| \leq \frac{1}{2}) = P(X \leq \frac{1}{2}) - P(X < -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

(δ') Αφού $F_X(1) = 1$, πρέπει να έχουμε $a \leq 1$. Για $a \leq 1$, πρέπει να ικανοποιείται η εξίσωση:

$$P(X \leq a) = F_X(a) = \frac{a+1}{2} = 0.8 \Rightarrow a = 0.6.$$

Άσκηση 6.

(α') Έχουμε

$$\begin{aligned} P(X < 1) &= P\left(\frac{X - 2.9}{\sqrt{1.96}} < \frac{1 - 2.9}{\sqrt{1.96}}\right) = P\left(\frac{X - 2.9}{\sqrt{1.96}} < -1.357\right) \\ &= \Phi(-1.357) = 1 - \Phi(1.357) \end{aligned}$$

(β') Ισχύει

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P\left(\frac{X - 2.9}{1.4} > \frac{4 - 2.9}{1.4}\right) = P\left(\frac{X - 2.9}{1.4} > 0.786\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{X - 2.9}{1.4} \leq 0.786\right) = 1 - \Phi(0.786) \end{aligned}$$

(γ') Πρέπει

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P\left(\frac{X - 2.9}{1.4} \geq \frac{2 - 2.9}{1.4}\right) = P\left(\frac{X - 2.9}{1.4} \geq -0.643\right) \\ &= P\left(\frac{X - 2.9}{1.4} < 0.643\right) = \Phi(0.643) \end{aligned}$$

(δ') Μας ζητείται

$$\begin{aligned} P(2.5 < X < 4) &= P\left(\frac{2.5 - 2.9}{1.4} < \frac{X - 2.9}{1.4} < \frac{4 - 2.9}{1.4}\right) \\ &= P(-0.286 < \frac{X - 2.9}{1.4} < 0.786) \\ &= \Phi(0.786) - \Phi(-0.286) \\ &= \Phi(0.786) - (1 - \Phi(0.286)) \end{aligned}$$

(ε') Θέλουμε X_0 τέτοιο ώστε $P(X < X_0) = 0.05$. Έχουμε,

$$\Phi(1.645) = 0.95 \Rightarrow 1 - P(1.645) = \Phi(-1.645) = 0.05$$

Συνεπώς, το κατάλληλο X_0 θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$-1.645 = \frac{X_0 - 2.9}{1.4}$$

Λύνοντας ως προς X_0 έχουμε

$$X_0 = 2.9 - (1.645)(1.4) = 0.597, \text{ που είναι περίπου 7 μήνες.}$$

Άσκηση 7.

Έστω η τ.μ. X που αναπαριστά την εσωτερική διάμετρο των σωλήνων. Τότε $X \sim N(10, \sigma^2)$. Η πιθανότητα ανακύκλωσης των σωλήνων είναι:

$$\begin{aligned} p &= P(X > 10.1 \text{ ή } X < 9.9) = 1 - P(9.9 < X < 10.1) \\ &= 1 - P\left(\frac{9.9 - 10}{\sigma} < \frac{X - 10}{\sigma} < \frac{10.1 - 10}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) + \Phi\left(-\frac{0.1}{\sigma}\right) \\ &= 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right] \end{aligned}$$

(α') Η πιθανότητα ανακύκλωσης είναι

$$p = 2(1 - \Phi(1)) = 2(1 - 0.8413) = 0.3174.$$

Έστω Y η τ.μ. που αναπαριστά τον αριθμό των σωλήνων από το δείγμα των πέντε σωλήνων που ανακυκλώνονται. Ισχύει ότι $Y \sim \text{Bin}(n = 5, p = 0.3174)$.

Τότε,

$$P(Y = 3) = \binom{5}{3} (0.3174)^3 (1 - 0.3174)^2 \cong 0.149.$$

(β') Θα πρέπει

$$p = 2 \left(1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right) = 0.06 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) = 0.97 \cong \Phi(1.88).$$

Άρα,

$$\frac{0.1}{\sigma} = 1.88 \Rightarrow \sigma = 0.053 \Rightarrow \sigma^2 = 0.002809.$$