

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Θέματα : Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (I).

Ημερομηνία Ανάθεσης: 23/11/2015

Ημερομηνία Παράδοσης: 4/12/2015

Άσκηση 1.

Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (α') Βρείτε την τιμή της σταθεράς c και δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π.π.
- (β') Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.), $F_X(x)$ της τ.μ. X και δώστε τη γραφική παράστασή της.
- (γ') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > 2)$.
- (δ') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X = 2.5)$.
- (ε') Βρείτε το εμβαδόν κάτω από την $f_X(x)$ για $1 \leq x \leq 3$.

Άσκηση 2.

Έστω ότι η ώρα άφιξης ενός τρένου σε ένα σταθμό είναι μία ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή X με παραμέτρους τις πρωινές ώρες 8 : 45 και 9 : 15, δηλαδή $X \sim U(8 : 45, 9 : 15)$. Αν φτάσετε στο σταθμό ακριβώς στις 9 : 00, ποια είναι η πιθανότητα:

- (α') Να χάσετε το τρένο;
- (β') Να περιμένετε ακριβώς πέντε λεπτά;
- (γ') Να περιμένετε το πολύ πέντε λεπτά;
- (δ') Να περιμένετε τουλάχιστον πέντε λεπτά;

Άσκηση 3.

Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (α') Βρείτε την τιμή της σταθεράς c .
- (β') Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[X] = \mu$.
- (γ') Υπολογίστε τη διασπορά, $var(X) = \sigma^2$.
- (δ') Ολοκληρώνοντας κατάλληλα, δείξτε ότι η διάμεσος m ικανοποιεί τη σχέση

$$6m^4 - 8m^3 + 1 = 0$$

Βοήθεια: Για τη διάμεσο m , ισχύει εδώ (και γενικά για τις συνεχείς τ.μ.) ότι $P(-\infty < x < m) = 0.5$.

Άσκηση 4.

Έστω X η τ.μ. που εκφράζει το χρόνο ζωής (σε χιλιάδες ώρες) ενός λαμπτήρα. Έχει βρεθεί ότι η πιθανότητα να λειτουργήσει ο λαμπτήρας περισσότερο από χρόνο x είναι:

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

για κάποιο $\lambda > 0$. Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.), $F_X(x)$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.), $f_X(x)$. Το εργοστάσιο το οποίο κατασκευάζει τους λαμπτήρες, επιθυμεί να δώσει στους πελάτες εγγύηση για ορισμένο αριθμό ωρών. Αν ένας λαμπτήρας καεί νωρίτερα, επιστρέφεται στο εργοστάσιο για αντικατάσταση. Αν έχει εκτιμηθεί ότι $\lambda = 0.1$, ποιος αριθμός ωρών πρέπει να δοθεί σαν εγγύηση ώστε το πολύ 1% των λυχνιών να επιστρέφονται στο εργοστάσιο;

Άσκηση 5.

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.), της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{(x+1)}{2}, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

(α') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > \frac{1}{2})$.

(β') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(-\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4})$.

(γ') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X| \leq \frac{1}{2})$.

(δ') Ποια είναι η τιμή του α ώστε να ισχύει $P(X \leq \alpha) = 0.8$;

Άσκηση 6.

Η διάρκεια ζωής (σε χρόνια) ενός προσωπικού υπολογιστή μοντελοποιείται με μια Κανονική τ.μ. X με μέση τιμή $\mu = 2.9$ χρόνια και διασπορά $\sigma^2 = 1.96$ χρόνια. Στις ακόλουθες ερωτήσεις, οι απαντήσεις να δοθούν συναρτήσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $\Phi(\cdot)$.

(α') Τι ποσοστό των υπολογιστών θα χαλάσει κατά τον πρώτο χρόνο;

(β') Τι ποσοστό των υπολογιστών θα συνεχίσει να λειτουργεί για 4 χρόνια ή περισσότερο;

(γ') Τι ποσοστό των υπολογιστών θα συνεχίσει να λειτουργεί για τουλάχιστον 2 χρόνια;

(δ') Τι ποσοστό των υπολογιστών θα συνεχίσει να λειτουργεί για περισσότερο από 2.5 χρόνια, αλλά λιγότερο από 4 χρόνια;

(ε') Αν ο κατασκευαστής επιθυμεί να υιοθετήσει μια πολιτική εγγύησης κατά την οποία μόνο το 5% των υπολογιστών πρέπει να αντικατασταθούν, ποια θα είναι η διάρκεια της περιόδου εγγύησης; Σας δίδεται ότι $\Phi(1.645) = 0.95$.

Άσκηση 7.

Η εσωτερική διάμετρος (σε ίντσες) των σωλήνων από χαλκό που παράγει ένα εργοστάσιο ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(10, \sigma^2)$. Σωλήνες με εσωτερική διάμετρο εκτός των ορίων 10 ± 0.1 ίντσες ανακυκλώνονται.

- (α') Αν $\sigma = 0.1$, να βρεθεί η πιθανότητα να ανακυκλωθούν ακριβώς τρεις σωλήνες σε ένα δείγμα πέντε σωλήνων που επιλέγεται τυχαία από την παραγωγή του εργοστασίου.
- (β') Πόση θα πρέπει να γίνει η παράμετρος σ^2 έτσι ώστε η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα να είναι 0.06;